

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR M. RENÉ BAILLAUD

**1^{re} THÈSE : Détermination de l'heure au moyen de
l'Instrument photographique des Hau-
teurs égales.**

2^e THÈSE : Propositions données par la Faculté.

Soutenues le

Juin 1923 devant la Commission d'examen

MM. ANDOYER

Président

URBAIN

COTTON

DRIENCOURT

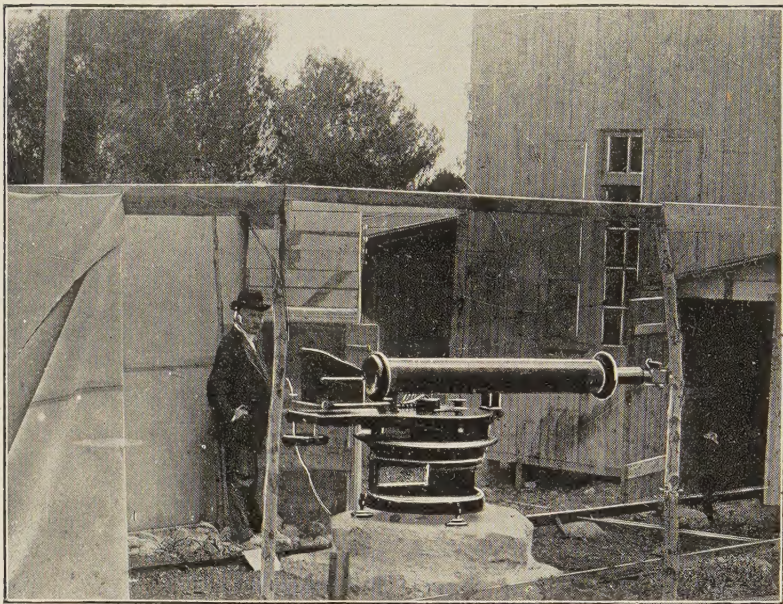
} *Examineurs*

PARIS

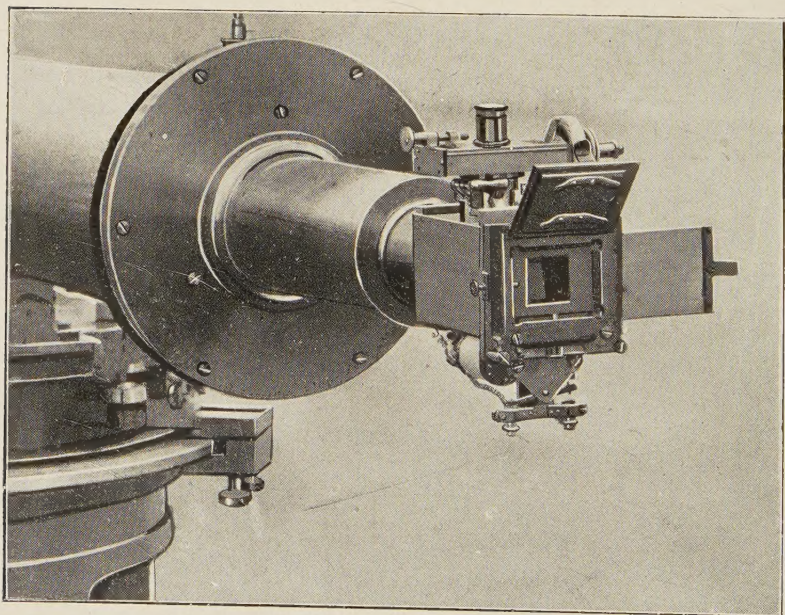
LES PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

49, Boulevard Saint-Michel, 49

1923



INSTRUMENT PHOTOGRAPHIQUE DES HAUTEURS ÉGALES



OBTURATEUR ET CHASSIS

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR M. RENÉ BAILLAUD

**1^{re} THÈSE : Détermination de l'heure au moyen de
l'Instrument photographique des Hau-
teurs égales.**

2^e THÈSE : Propositions données par la Faculté.

Soutenues le Juin 1923 devant la Commission d'examen

MM. ANDOYER	<i>Président</i>
URBAIN	} <i>Examineurs</i>
COTTON	
DRIENCOURT	

PARIS

LES PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

49, Boulevard Saint-Michel, 49

1923

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

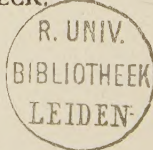
Doyen. MOLLIARD, *Professeur*.. Physiologie végétale.

Doyen honoraire. P. APPELL.

Professeurs honoraires. { P. PUISEUX.
VELAIN.
BOUSSINESQ.
G. PRUVOT.

	EMILE PICARD.....	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
	KÖNIGS.....	Mécanique physique et expérimentale.
	GOURSAT.....	Calcul différentiel et calcul intégral.
	HALLER.....	Chimie organique.
	JOANNIS.....	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	JANET.....	Electrotechnique générale.
	WALLERANT.....	Minéralogie.
	ANDOYER.....	Astronomie.
	PAINLEVÉ.....	Mécanique analytique et mécanique céleste.
	HAUG.....	Géologie.
	H. LE CHATELIER.....	Chimie générale.
	GABRIEL BERTRAND.....	Chimie biologique.
	M ^{me} P. CURIE.....	Physique générale et radioactivité.
	CAULLERY.....	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ.....	Chimie appliquée.
	G. URBAIN.....	Chimie minérale.
	ÉMILE BOREL.....	Calcul des probabilités et physique mathémat.
	MARCHIS.....	Aviation.
	JEAN PERRIN.....	Chimie physique.
	ABRAHAM.....	Physique.
	CARTAN.....	Mécanique rationnelle.
	CL. GUICHARD.....	Géométrie supérieure.
	LAPICQUE.....	Physiologie.
	GENTIL.....	Géographie physique.
	VESSIOT.....	Théorie des groupes et calcul des variations.
	COTTON.....	Physique générale.
	DRACH.....	Application de l'analyse à la géométrie.
	C. FABRY.....	Physique.
	CHARLES PÉREZ.....	Zoologie.
	LÉON BERTRAND.....	Géologie appliquée et géologie régionale.
	DANGEARD.....	Botanique.
	LESPIEAU.....	Théories chimiques.
	LEDUC.....	Physique théorique et physique céleste.
	MONTEL.....	Mathématiques générales.
	MAURAIN.....	Physique du globe.
	RABAUD.....	Biologie expérimentale.
	WINTREBERT.....	Anatomie et physiologie comparées.
	HÉROUARD.....	Zoologie.
	RÉMY PERRIER.....	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	SAGNAC.....	Physique théorique et physique céleste.
	PORTIER.....	Physiologie.
	BLAISE.....	Chimie organique.
	PÉCHARD.....	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	AUGER.....	Chimie analytique.
	M. GUICHARD.....	Chimie minérale.
	GUILLET.....	Physique.

Secrétaire. DANIEL TOMBECK.

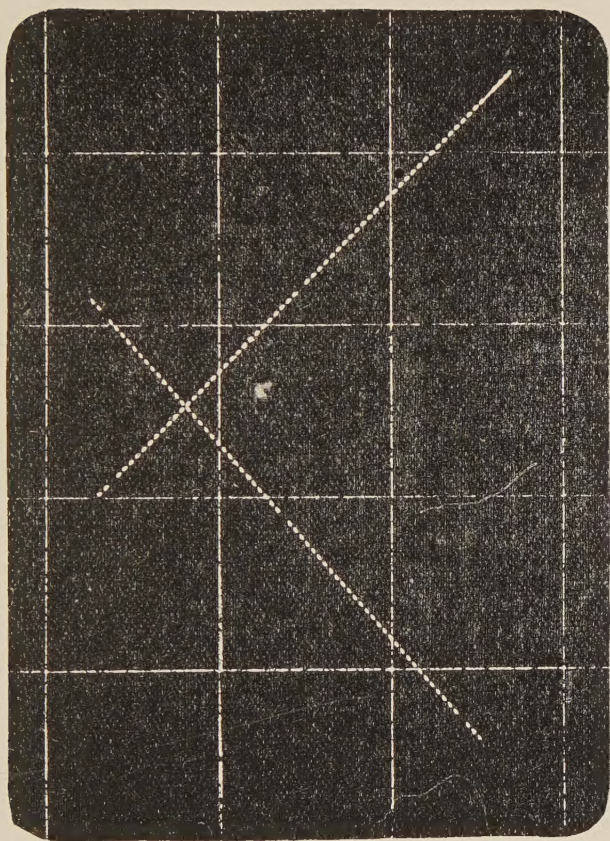


A MON PÈRE

AU GÉNÉRAL FERRIÉ



Digitized by the Internet Archive
in 2026



α Bouvier — Photographie obtenue à Nice le 10 mars 1921
avec l'instrument photographique des hauteurs égales,
grossissement 10 fois.

INTRODUCTION

La détermination de la correction d'une pendule et celle de la latitude se font actuellement presque toujours, dans les observatoires, avec des instruments méridiens. Ceux-ci doivent être installés sur des piliers d'une fixité très rigoureuse, afin que les constantes instrumentales restent aussi invariables que possible, au moins dans le courant d'une même soirée. La mesure de ces quantités est elle-même une opération très délicate.

Pour ces motifs, les instruments méridiens sont presque exclusivement des instruments d'observatoires. Pour les missions et pour les opérations géodésiques, on emploie de préférence des instruments plus maniables et dont la mise en station est plus rapide. Ils sont d'ailleurs ordinairement susceptibles d'une précision beaucoup moindre.

C'est le théodolite qui a été le plus fréquemment employé : Les étoiles sont ici observées, habituellement, en dehors du méridien. Rappelons brièvement les diverses méthodes que l'on peut appliquer pour obtenir, avec cet instrument, la correction d'un chronomètre.

1° On peut mesurer la distance zénithale d'une étoile dont l'ascension droite et la déclinaison sont connues d'avance, et noter l'heure marquée par le chronomètre à l'instant où l'on fait cette mesure. Supposons connue la latitude du lieu d'observation. Il suffit, pour calculer l'angle horaire de l'étoile, et par suite la correction du chronomètre, de résoudre un triangle sphérique dont on connaît les trois côtés : colatitude, distance polaire, distance zénithale.

2° On peut aussi noter les heures, indiquées par le chronomètre, pour lesquelles la hauteur d'une même étoile, observée d'abord à l'Est puis à l'Ouest, prend la même valeur. Celle-ci est d'ailleurs arbitraire. Elle est définie par l'inclinaison que l'on doit donner à l'axe optique de la lunette du théodolite, convenablement orientée en azimut, pour que l'on aperçoive dans le champ l'image de l'étoile bissectée par le fil

horizontal du réticule. — On prend la moyenne des deux heures ainsi observées. L'écart entre l'ascension droite de l'étoile et le nombre trouvé est égal à la correction du chronomètre à l'instant du passage de l'étoile au méridien. — Cette méthode est appelée « méthode des hauteurs correspondantes ».

3° Au lieu de noter les heures pour lesquelles la hauteur d'une même étoile reprend la même valeur quand on l'observe à l'Est, puis à l'Ouest, on peut noter les heures des passages de plusieurs étoiles (observées les unes à l'Est, les autres à l'Ouest), à un même petit cercle de hauteur.

Soit ϕ la latitude du lieu, h la hauteur commune des étoiles observées, α α' α'' ... leurs ascensions droites, δ δ' δ'' ... leurs déclinaisons, t t' t'' ... les heures observées ; Cp_0 la correction du chronomètre à un instant initial t_0 , m sa marche. Pour chaque étoile on a une équation de la forme :

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos 15 [t + Cp_0 + m (t - t_0) - \alpha].$$

Les inconnues sont h , φ , Cp_0 et m . Si l'on suppose connue la marche m du chronomètre, leur nombre se réduit à trois. Il suffit donc de trois observations pour les déterminer toutes.

Si l'on observe un plus grand nombre d'étoiles on a plus d'équations que d'inconnues. On doit alors avoir recours, pour déterminer ces dernières, à une méthode d'approximation (celle des moindres carrés par exemple).

La méthode que nous venons de décrire, dite « des hauteurs égales », est due à Gauss. Elle permet de déterminer simultanément l'heure et la latitude. Nous reviendrons, dans le cours de cet exposé sur son application.

Gauss a employé, comme instrument d'observation, le sextant ; mais on pourrait aussi bien employer un théodolite dont la lunette serait calée à une hauteur invariable, ou tout autre instrument permettant de définir la hauteur d'un astre.

La méthode de Gauss est devenue d'un emploi particulièrement intéressant quand a été imaginé par MM. Claude et Driencourt l'astrolabe à prisme.

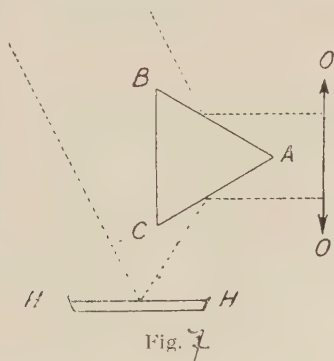
Principe de l'astrolabe à prisme. — Devant un objectif dont l'axe optique est horizontal, est fixé un prisme équilatéral. Les arêtes de ce prisme sont horizontales. La face BC, située contre l'objectif est perpendiculaire à l'axe optique de ce dernier (fig. 1). (page 15)

Un faisceau de rayons parallèles, perpendiculaires à l'arête A et issus d'une étoile dont la hauteur apparente est voisine de 60 degrés frappe la face AB presque normalement, se réfléchit totalement sur AC, et traverse presque normalement (sans dispersion) la face BC. Il donne dans le plan focal de la lunette une image de l'étoile, au voisinage de l'axe optique de l'objectif.

En avant et au-dessous du prisme, se trouve un bain de mercure qui réfléchit un faisceau de rayons lumineux parallèles aux premiers, issus de la même étoile.

Ces rayons frappent presque normalement la face AC, se réfléchissent totalement sur AB, traversent presque normalement la face BC, et donnent dans le plan focal de la lunette une seconde image située encore au voisinage de l'axe optique.

Il est facile de voir que ces images ont, dans le champ, des vitesses



verticales égales et de signes contraires, des vitesses horizontales égales et de même signe.

Si les réglages de l'appareil sont bien faits, ces deux images, à un certain moment, coïncident. La hauteur apparente de l'étoile est alors égale, rigoureusement, à l'angle du prisme : 60 degrés.

L'observation consiste à noter l'heure de la coïncidence : On peut employer pour cela la méthode de l'œil et de l'oreille. On peut aussi faire usage d'un chronographe. — Cela revient à noter l'heure qu'indique le chronomètre lorsqu'une étoile passe à un petit cercle, de hauteur invariable, égale à l'angle du prisme plus la réfraction.

C'est précisément ce qu'exige l'emploi de la méthode des hauteurs égales de Gauss. Aussi a-t-on pu dire très justement que l'astrolabe à prisme réalise, pour l'application de cette méthode, des conditions instrumentales à peu près parfaites.

Les images sont observées sur fond sombre, au moyen d'un oculaire à fort grossissement.

L'erreur commise sur la détermination de l'heure de chaque coïncidence est, à grossissement égal, du même ordre de grandeur que celle que l'on commet quand on observe avec un instrument méridien le passage d'une étoile à un fil du réticule.

Les inconnues du problème (distance zénithale, correction de pendule et latitude) seraient donc sans doute assez mal déterminées, si l'on n'avait soin d'observer un très grand nombre d'étoiles. Or on peut le faire très aisément grâce à la rapidité d'une observation individuelle.

Nous n'insisterons pas, pour le moment, davantage, sur l'emploi de la méthode de Gauss dont MM. Claude et Driencourt ont donné une solution graphique d'une extrême élégance. On trouvera tous les renseignements désirables sur cette question et sur les détails de l'appareil, dans leur livre très documenté : « Description et usage de l'astrolabe à prisme ».

Influence de la mise au point de l'oculaire. — Une critique, faite, sur un point de détail, à cet instrument attira mon attention et fut l'origine des travaux dont l'exposé fait l'objet du présent mémoire :

On a remarqué depuis longtemps qu'une condition essentielle pour faire de bonnes observations, est de ne pas toucher à la mise au point de l'oculaire pendant toute la soirée d'observations.

Si la mise au point de l'oculaire varie, tout se passe comme si l'angle du prisme variait : la coïncidence des images est observée trop tôt ou trop tard.

M. Chrétien (C. R. t. 158, p. 1145 — séance du 27 avril 1914) a expliqué ce fait en supposant que le plan d'observation se déplace. (Rappelons qu'avec l'astrolabe à prisme, on observe sur champ sombre.) L'explication serait la suivante :

Les images directe et réfléchie de chaque étoile sont fournies l'une par la moitié supérieure de l'objectif, l'autre par la moitié inférieure. Si le plan d'observation était le plan focal, on observerait la coïncidence des deux images à l'instant où les deux faisceaux frappent l'objectif parallèlement entre eux. Si le plan d'observation n'est pas le plan focal, chacun des faisceaux découpe sur lui un demi-cercle limité par un diamètre parallèle à l'arête A du prisme. M. Chrétien admet que ces deux demi-cercles sont, en réalité, les deux images que nous apercevons. Il est évident que la coïncidence de leurs centres a lieu à des instants

différents suivant la position du plan d'observation. En d'autres termes, tout se passe comme si l'angle du prisme variait quand ce plan se déplace.

Je me suis tout d'abord proposé d'examiner expérimentalement s'il en est bien ainsi. J'ai cherché pour cela à matérialiser le plan d'observation ; puis lui donnant les déplacements successifs, à mesurer chaque fois avec précision l'angle du prisme.

J'ai employé pour ces mesures, le prisme de l'astrolabe de l'Observatoire de Toulouse, que M. Cosserat a eu l'obligeance de mettre à ma disposition.

Ce prisme fut placé devant l'objectif suivant la disposition de la figure 2 : la face BC perpendiculaire à l'axe de la lunette, les arêtes du prisme parallèles aux fils d'ascension droite du réticule. Pour plus de simplicité, l'axe optique de la lunette était placé verticalement, et la face BC du prisme horizontalement. Les faces AB et AC avaient été préalablement argentées.

Le prisme était fixé sur un support constitué par un cylindre en laiton D limité sur sa face supérieure par une couronne horizontale en cuivre E (fig. 3).

Le bord inférieur du cylindre reposait sur un plateau de tôle P évidé en son centre et dont on pouvait régler l'horizontalité au moyen de trois vis calantes V_1 , V_2 , V_3 .

La boîte cylindrique D pouvait tourner sur le plateau P autour de l'axe F.

On laissait le prisme de l'astrolabe enchâssé dans sa monture et cette dernière était fixée sur la couronne E au moyen des trois vis v_1 , v_2 , v_3 .

En agissant sur les vis V_1 , V_2 , V_3 , et en faisant tourner la boîte D autour de l'axe F sur le plateau P, on pouvait régler la position du prisme de telle sorte qu'il satisfasse aux conditions indiquées plus haut (perpendicularité de l'axe optique de la lunette sur la face BC ; parallélisme des arêtes du prisme et du fil mobile d'ascension droite du réticule). Pour faire le premier réglage, on agissait sur les trois vis calantes, de façon que la moyenne des lectures obtenues en amenant le fil mobile en coïncidence avec son



Fig. 2.

image réfléchié par la face AB, puis avec celle réfléchié par la face AC du prisme, soit la même que la lecture au nadir. Pour rendre les arêtes du prisme parallèles au fil mobile d'ascension droite, on enlevait

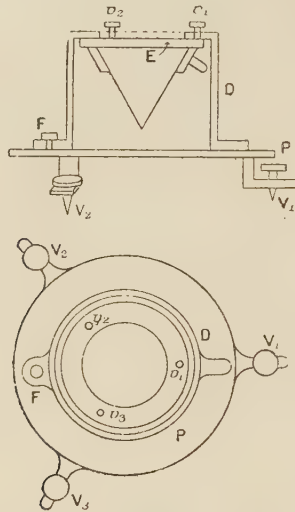


Fig. 3.

l'oculaire ; on apercevait alors à travers l'objectif l'arête du prisme, que l'on rendait parallèle au fil mobile en faisant tourner la boîte D autour de l'axe F d'un angle convenable.

L'angle A du prisme étant extrêmement voisin de 60° , les deux images du fil mobile étaient très voisines l'une de l'autre et on les apercevait confondues.

Afin de pouvoir observer alternativement l'une et l'autre, j'ai dû fixer, entre l'objectif et le prisme, un obturateur permettant de cacher à volonté l'une ou l'autre moitié de l'objectif. Cet obturateur était

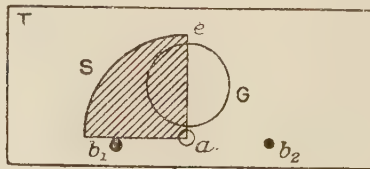


Fig. 4.

constitué par une plaque de tôle T évidée en son centre suivant un cercle G (fig. 4).

Un secteur en laiton S pouvait basculer autour d'un axe a de façon

à venir buter soit contre la vis b_1 , soit contre la vis b_2 . Dans un cas il cachait l'une des moitiés du cercle G, dans l'autre cas il cachait l'autre moitié.

Le système obturateur était orienté de telle sorte que lorsque le secteur S butait contre l'une des vis b_1 ou b_2 , le diamètre suivant lequel le cercle G était obturé se trouvait dans le plan du méridien de la lunette. Dans chaque cas, l'une des moitiés de l'objectif était cachée au prisme et l'on n'apercevait, dans le champ, que l'une des deux images du fil mobile obtenue par réflexion sur la face AC ou sur la face AB du prisme (fig. 5).

Les réglages étant supposés bien faits, et le secteur S de l'obturateur

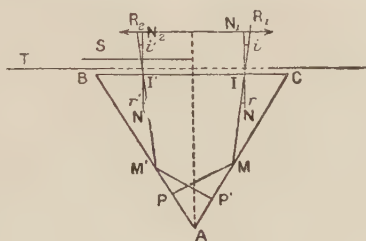


Fig. 5.

cachant la moitié gauche de l'objectif, on amenait le fil mobile en coïncidence avec son image vue par réflexion sur la face AB du prisme. Puis on découvrait la moitié gauche de l'objectif, et l'on cachait la moitié droite en faisant basculer le volet S. On amenait le fil mobile en coïncidence avec son image vue par réflexion sur la face AC (fig. 5).

Le trajet des rayons lumineux était alors dans un cas $R_1IMP MIR_1$, dans l'autre cas $R_2I'MP'MIR_2$.

On avait, dans le premier cas,

$$\widehat{P} = 90^\circ, \quad \widehat{M} = 90^\circ - \widehat{A};$$

dans le second cas,

$$\widehat{P}' = 90^\circ, \quad \widehat{M}' = 90^\circ - \widehat{A}.$$

L'angle que faisaient entre elles les deux directions MI et MI' était donc

$$3\widehat{A} - 180^\circ.$$

Cet angle était égal à $r + r'$, r et r' désignant les angles que faisaient les directions MI et MI' avec la normale à la face BC.

Si n est l'indice de réfraction du verre, et si i et i' désignent les angles N_1IR_1 , N_2IR_2 que faisaient les rayons émergents IR_1 et IR_2 avec la normale à la face BC, on a

$$i + i' = n (3 \hat{A} - 180^\circ),$$

d'où

$$\hat{A} = 60^\circ + \frac{i + i'}{3n}.$$

Or, $i + i'$ est égal à la différence $\lambda_1 - \lambda_2$ des lectures faites au tambour de la vis micrométrique, dans les deux cas, multipliée par le tour de vis. On a donc

$$(1) \quad \hat{A} = 60^\circ + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{3n} \tau,$$

τ désignant le tour de vis.

L'oculaire était mis, en premier lieu, bien au point sur les fils du réticule.

La variation de l'angle du prisme peut être obtenue théoriquement de la manière suivante :

On supposera d'abord, pour la facilité du raisonnement, que le prisme est rigoureusement équilatéral (ce qui est, à très peu de chose près, réalisé), et que le plan du réticule coïncide avec le plan focal. Les réglages sont supposés suffisamment bien faits pour que le fil mobile, placé au foyer F, coïncide avec ses deux images.

On déplace alors le micromètre tout entier. Le fil mobile vient en I sur l'axe optique. Ses deux images (géométriques) se forment en I' également sur l'axe optique. Soit d le défaut de mise au foyer.

On a

$$II' = 2 II = 2d.$$

Soient r le rayon de l'objectif (limité à sa surface utile), IJ la trace sur le plan du réticule du faisceau relatif à l'une des deux images.

Faisons l'hypothèse que tout se passe comme si le plan d'observation était le plan du réticule, c'est-à-dire comme si, lorsqu'on amène le fil mobile en coïncidence avec une de ses images, celle donnée par la moitié supérieure de l'objectif par exemple, on pointait le milieu M de IJ (fig. 6).



Fig. 6.

La distance x du point M à l'axe optique est

$$x = \frac{rd}{f \pm d}$$

ou très approximativement

$$x = \frac{rd}{f}.$$

Pour amener le fil mobile en coïncidence avec son image on doit le déplacer d'une quantité $\frac{x}{2}$, c'est-à-dire $\frac{rd}{2f}$.

Si l'on appelle ν le nombre de secondes contenues dans un radian, la distance angulaire des deux positions du fil mobile pour lesquelles ce dernier coïncide successivement avec ses deux images est

$$\frac{rd}{f^2} \cdot \nu.$$

Plus généralement, si l'angle du prisme n'est pas rigoureusement de 60° , la distance angulaire des deux positions du fil mobile est égale à ce qu'elle serait si le réticule coïncidait rigoureusement avec le plan focal, c'est-à-dire à n ($3A - 180^\circ$) plus la correction due au défaut de mise au foyer, correction que nous venons de calculer.

Soient λ_1 et λ_2 les lectures que l'on ferait si l'erreur de mise au foyer était nulle, l_1 et l_2 les lectures faites réellement. On a

$$(2) \quad (\lambda_1 - \lambda_2) \tau = (l_1 - l_2) \tau \pm \frac{rd}{f^2} \nu,$$

On adopte le signe — lorsque le plan du réticule est compris entre le foyer et l'objectif, le signe + quand il est situé au delà du foyer.

Quand on déplace le réticule d'une quantité η , la variation de $(\lambda_1 - \lambda_2) \tau$ est $\frac{r\eta}{f^2} \nu$. Si l'on tient compte de la relation (1), la variation de l'angle du prisme est $\frac{r\eta}{3nf^2} \nu$.

L'oculaire étant constamment au point sur les fils, j'ai déplacé successivement le micromètre, et j'ai mesuré ces déplacements au moyen d'un pied à coulisse. Je pouvais ainsi les apprécier au dixième de millimètre près. J'ai mesuré d'autre part la quantité $\frac{l_1 - l_2}{3n} \tau$ pour chaque position du micromètre. J'ai obtenu les résultats suivants :

τ_i	Variations mesurées	
	de $\frac{l_1 - l_2}{3n} \tau$	$\frac{r\eta}{3n^2} \nu$
0,9	1,42	1,44
1,1	1,82	1,44
1,2	1,98	1,88

Les variations de $\frac{l_1 - l_2}{3n} \tau$ mesurées et les variations calculées par l'expression $\frac{r\eta}{3n^2} \nu$ coïncident donc aux erreurs possibles d'observation près (dixième de seconde d'arc).

L'hypothèse que l'on a faite est donc justifiée dans les limites de précision dont les mesures sont susceptibles.

Dans une seconde série d'expériences, sans toucher à la mise au foyer du réticule, j'ai fait varier de 4^{mm} le tirage de l'oculaire. Je n'ai observé aucune variation de l'angle du prisme mesuré.

Donc, quand on fait varier le tirage du micromètre, l'angle du prisme varie. Quand on fait varier le tirage de l'oculaire, il ne varie pas d'une façon sensible. Tout se passe comme si l'on pointait toujours le milieu M de la trace de chaque faisceau sur le plan du réticule. En d'autres termes, le plan du réticule est le plan d'observation, même s'il ne coïncide pas avec le plan focal et même si l'observateur ne s'est pas mis au point sur les fils. On peut dire que le réticule matérialise le plan d'observation comme le ferait une plaque photographique (').

En cela réside une différence remarquable entre les instruments à réticule et à champ éclairé où le plan d'observation est ainsi matérialisé et ceux à champ sombre comme l'astrolabe où le plan d'observation est en réalité le plan d'accommodation de l'observateur et peut varier suivant le tirage de l'oculaire et aussi suivant l'observateur.

En appliquant la méthode qui vient d'être exposée et en tenant compte du défaut de mise au foyer du réticule, j'ai pu mesurer les 3 angles du prisme de l'astrolabe de Toulouse ; j'ai obtenu les 3 résultats suivants :

(') Le même résultat sera obtenu d'une façon beaucoup plus certaine encore par l'emploi de la photographie. Si, en effet, on place une plaque photographique dans le plan focal de l'astrolabe, cette plaque définit le plan d'observation d'une façon beaucoup plus inviolable que ne peut le faire aucun réticule. (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 169, p. 332)

$$\begin{aligned}\hat{A} &= 59^{\circ}.59'.59,32 \\ \hat{B} &= 60. 0. 1,60 \\ \hat{C} &= 59.59.58,60\end{aligned}$$

La somme est $179^{\circ}59'59,52$.

Le faible écart de ces 3 nombres à 60° montre en particulier quel haut degré de précision a atteint la maison Jobin dans la taille des prismes.

Il est intéressant de rapprocher de ces résultats ceux qu'à obtenus M. Rabiouille en 1913 pour la valeur de ce même angle A, valeurs déduites successivement de 5 soirées d'observations faites avec cet astrolabe :

17 mai.....		$60^{\circ}. 0'. 1,7$
8 juillet {	1 ^{re} série	$59.59.59,7$
	2 ^e série	$59,7$
10 juillet {	1 ^{re} série	$59.59.59,1$
	2 ^e série	$59,2$
11 juillet		$59.59.59,2$
12 juillet {	1 ^{re} série	$59.59.58,6$
	2 ^e série	$58,8$
Moyenne		$59.59.59,50$

valeurs, très concordantes pour une même soirée, mais variant d'une soirée à l'autre. Il est probable qu'il faut rechercher la cause de cette variation dans la différence de mise au point de l'oculaire dans les différentes soirées.

Il va sans dire qu'une plaque photographique pourra matérialiser le plan d'observation d'une façon beaucoup plus invariable que ne pourrait le faire aucun réticule.

C'est ainsi que j'ai été conduit, par des considérations en quelque sorte accessoires à envisager la construction d'un astrolabe photographique. Non point que l'élimination de l'erreur dont nous venons de parler soit un avantage négligeable ; mais l'application de la photographie à la détermination de l'heure ne trouve effectivement là qu'un intérêt secondaire.

L'avantage fondamental en est de permettre la réalisation d'un instrument entièrement automatique et impersonnel grâce auquel la détermination de la correction de pendule peut être exempte d'erreurs instrumentales systématiques.

DÉTERMINATION DE L'HEURE AU MOYEN DE L'INSTRUMENT PHOTOGRAPHIQUE DES HAUTEURS ÉGALES

CHAPITRE I

INSTRUMENT PHOTOGRAPHIQUE DES HAUTEURS ÉGALES PRINCIPE ET DESCRIPTION

J'ai pu, grâce au concours de l'Établissement Central du Matériel de la Radiotélégraphie militaire, faire construire un instrument du genre astrolabe à prisme destiné, comme ce dernier, à la détermination de l'heure et de la latitude, mais où cette détermination est faite photographiquement.

M. Claude ayant exprimé le désir que le nom d'astrolabe soit exclusivement réservé à l'instrument dont il est l'inventeur, j'appellerai désormais mon appareil : *instrument photographique des hauteurs égales*.

Le principe fondamental en est le même que celui de l'appareil de MM. Claude et Driencourt. Il se compose, comme ce dernier, essentiellement, d'un objectif, d'un prisme et d'un bain de mercure.

Modifications apportées au dispositif précédent dans l'instrument photographique des hauteurs égales. — La matière dont est constitué le prisme de l'astrolabe doit être très homogène, car les rayons lumineux qui fournissent les images la traversent. Cette condition limite beaucoup les dimensions que l'on peut donner à ce prisme. Il semble que l'on ne peut guère dépasser celles de l'astrolabe grand modèle de l'Observatoire de Paris (6 cm. de côté). Pour l'instrument photographique des hauteurs égales, il était indispensable, ainsi que l'on pourra aisément s'en rendre compte dans le cours de cet exposé, de pouvoir donner à l'objectif et au prisme des dimensions beaucoup plus considérables, sous peine de ne pouvoir observer qu'un nombre très insuffisant d'étoiles.

Adoptant une disposition qui rappelle celle qu'avaient employée MM. Nussl et Fric dans leur lunette circumzénithale, j'ai retourné le prisme de façon que son arête A soit située contre l'objectif O,O (fig. 7). (Hayden) Les faces AB et AC sont argentées.

Le faisceau lumineux issu de l'étoile donne encore dans le champ de la lunette deux images dont les vitesses verticales sont égales et de signes contraires, dont les vitesses horizontales sont égales et de même signe et qui coïncident lorsque la hauteur apparente de l'étoile est égale à l'angle du prisme.

Mais les rayons lumineux issus de l'étoile ne traversent pas le prisme. Ils se réfléchissent seulement sur ses deux faces. Celles-ci peuvent donc réellement être regardées comme deux miroirs plans rigidement liés. Il est donc d'importance secondaire que la matière dont le prisme est constitué soit tout à fait homogène, et l'on peut sans inconvénient lui donner de très grandes dimensions.

Cette disposition présente aussi l'avantage que l'angle A du prisme

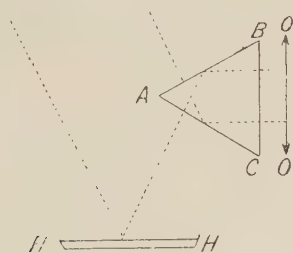


Fig. 1

peut être pris quelconque, ce qui, dans certains cas particuliers, peut être d'une assez grande importance.

On a été tenté de remplacer le prisme par deux miroirs plans. Il a semblé que l'invariabilité de leur angle serait peut-être assurée d'une façon moins certaine, et l'on y a renoncé.

Dans le plan focal de la lunette peut être placé un châssis photographique.

Principe des observations. — On cale l'instrument à un azimut tel que les deux images d'une étoile doivent venir en coïncidence au milieu du champ. On laisse l'instrument immobile.

Ces deux images traceront alors sur la plaque deux traînées ; on se propose de déduire de l'examen du cliché l'heure de la coïncidence.

Il est nécessaire pour cela de savoir en quels points des deux traînées se trouvent simultanément les deux images à chaque instant T lu sur une pendule ou sur un chronographe.

Pour y parvenir, j'ai placé devant la plaque photographique un obturateur composé de deux volets, pouvant, suivant la position qu'ils occupent, intercepter les faisceaux lumineux relatifs aux deux images, ou les laisser impressionner le cliché.

Le mouvement de ces volets est commandé par une pendule à contacts. Ils s'ouvrent et se ferment à des intervalles de temps constants, et correspondant à des secondes rondes.

Les traînées des images sur la plaque ne sont donc pas continues, mais sont composées d'une série de traits équidistants.

On connaît l'heure du commencement et l'heure de la fin de chaque trait, et l'on peut, au moyen d'une machine à mesurer, déterminer avec précision quelles positions occupent, sur la plaque, les points correspondants des deux traînées.

Dans tout ce qui suivra, nous conserverons le nom de « points correspondants » aux positions occupées simultanément sur la plaque par les deux images.

Description de l'instrument. — Deux instruments ont été construits jusqu'ici. L'un a une distance focale presque double de celle de l'autre.

Nous les désignerons donc dans ce qui va suivre par les expressions : « petit et grand modèle ».

Tous deux d'ailleurs présentent la même forme générale que l'astrolabe à prisme de MM. Claude et Driencourt. Leurs parties mécaniques ont été construites par la maison Édouard Bouty.

A. — Instrument photographique des hauteurs égales petit modèle. — L'axe vertical de rotation est supporté par un trépied qui repose par trois vis calantes sur trois pierres cimentées dans le sol.

Sur cet axe tourne une crapaudine. Elle entraîne dans son mouvement un premier plateau horizontal en fonte qui fait corps avec elle.

Un second plateau horizontal repose sur le premier par trois vis calantes. C'est sur lui qu'est fixé l'ensemble de la lunette et du prisme.

L'horizontalité de l'axe optique de la lunette peut être réglée au moyen des trois vis calantes du plateau supérieur ; la verticalité de l'axe de rotation, au moyen des trois vis calantes du pied.

Un *cercle gradué* concentrique à l'axe vertical permet de lire l'azi-

mut de la lunette. Une pince de serrage permet de caler celle-ci dans tel azimut que l'on veut.

L'objectif, construit par la maison Jobin, est un objectif photographique de 10 $\frac{\%}{m}$ de diamètre et de 1 m. de foyer.

Le prisme, construit par la même maison, est équilatéral; son angle est très voisin de 60 degrés. Deux de ses faces seulement sont taillées et argentées; la troisième est dépolie.

Ce prisme est enchâssé dans une boîte cubique, évidée sur ses faces et fixée à l'extrémité de la lunette. Trois vis de réglage, placées derrière la face arrière du prisme, permettent d'orienter celle-ci perpendiculairement à l'axe optique de l'objectif.

Le bain de mercure est du même type que celui de l'astrolabe de MM. Claude et Driencourt, mais son diamètre est plus grand. La cuvette est une calotte sphérique de grand rayon de courbure, en cuivre rouge; le cuivre est amalgamé avec le mercure.

Micromètre. — Il est commode de voir les deux images immédia-

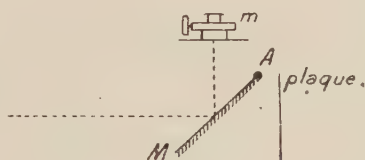


Fig. 8.

tement avant l'observation de chaque étoile, afin de pouvoir caler la lunette dans un azimut tel que la coïncidence ait lieu à peu près au milieu du champ, et aussi pour régler l'horizontalité de l'arête du prisme. On verra, dans la suite de cet exposé, que cette condition est réalisée, lorsque dans leur mouvement, les deux images restent constamment sur une même verticale. On peut donc aisément, si l'on a la possibilité de voir les images, s'assurer de ces réglages immédiatement avant chaque observation.

Dans ce but se trouve, en avant du châssis photographique, un miroir plan M pouvant tourner autour d'un axe horizontal A parallèle à la plaque.

Un micromètre *m* est au-dessus de ce miroir. Le miroir M peut être mis à volonté dans deux positions, soit qu'il fasse avec l'axe optique un angle de 45 degrés (fig. 3), soit qu'on le place horizontalement. Dans le premier cas il renvoie les rayons lumineux issus de l'étoile dans le champ

du micromètre m et l'observateur peut apercevoir les deux images en mettant son œil à l'oculaire. Dans le second cas, le miroir n'intercepte plus les faisceaux et les deux images viennent impressionner la plaque.

Obturateur. — Les volets de l'obturateur sont mis en mouvement par un électro-aimant composé de deux bobines A et B et d'une pièce polaire commune C. La palette de l'électro-aimant est composée d'une pièce de fer doux P en forme d'arc de cercle, pouvant tourner autour d'un axe vertical O parallèle à l'axe des bobines A et B (fig. 9). Elle est solidaire d'un levier L portant à son extrémité un des deux volets V. Suivant que la palette P est attirée par la bobine A ou par la bobine B, l'obturateur est fermé ou ouvert.

Deux palettes $P_1 P$ sont attirées simultanément par l'électro-aimant entraînant dans leur mouvement les deux volets V. Ceux-ci s'ouvrent donc et se ferment comme le feraient des ciseaux.

Une lame de cuivre D est entraînée par le mouvement du levier L

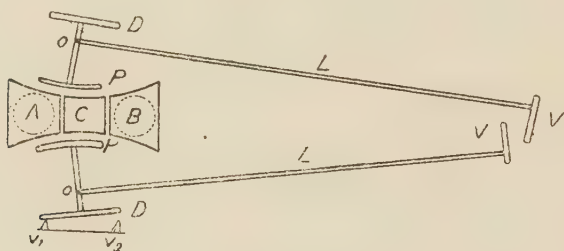


Fig. 9.

et, suivant la position de ce levier, vient alternativement en contact avec deux vis de butée v_1 et v_2 .

Elle ouvre et ferme chaque fois le circuit d'un chronographe à plume. Celle-ci, sur une bande de papier se déroule, indique, par une déviation, l'heure du contact. On n'enregistre donc pas, par ce dispositif, l'heure qu'il est au moment de l'ouverture ou de la fermeture du circuit de la pendule (cette heure ne serait pas rigoureusement la même que celle de la fermeture des volets, par suite du retard d'aimantation du noyau de l'électro-aimant), mais on enregistre l'heure qu'il est au moment du contact des vis de butée v_1 et v_2 avec la lame D. Elle ne diffère de celle où les faisceaux lumineux commencent à impressionner la plaque que par la durée de l'ouverture et de la fermeture des volets. Cette dernière est faible et peut être aisément mesurée.

B. — **Instrument grand modèle.** — L'instrument grand modèle diffère assez notablement du précédent.

L'objectif a $18 \frac{0}{m}$ de diamètre, 1 m. 90 de distance focale ; les dimensions de l'appareil sont donc beaucoup plus grandes. Aussi a-t-on jugé utile de faire reposer le plateau horizontal inférieur en fonte sur trois couples de galets pouvant tourner autour d'un axe vertical sur un chemin de roulement de $50 \frac{0}{m}$ de diamètre porté par le socle.

Comme dans l'instrument petit modèle, et comme dans l'astrolabe ; le plateau supérieur en fonte repose sur le plateau inférieur par trois vis calantes ; mais alors que dans ces derniers elles sont disposées comme les trois sommets d'un triangle rectangle, elles le sont ici, pour des motifs de possibilité de construction, comme ceux d'un triangle équilatéral. Cette modification ne nuit d'ailleurs en rien aux observations.

Le prisme, qui nous a été prêté par l'Observatoire de Paris, est celui qui a servi à M. Lœwy pour la mesure de la constante de l'aberration. Ce prisme est en crown. Il a seulement deux faces taillées. Leur angle est de 45 degrés. Il est beaucoup plus lourd que celui de l'instrument petit modèle. Aussi n'a-t-il pas été possible de le fixer à l'extrémité du tube de la lunette comme il avait été fait pour celui-ci.

Dans la disposition adoptée, il est indépendant de ce tube ; il est enchâssé dans une monture que l'on peut faire tourner autour d'un axe vertical sur le petit plateau horizontal en fonte. Celui-ci repose par trois vis calantes sur le grand plateau horizontal supérieur qui porte la lunette. Au moyen de ces trois vis calantes et du mouvement de rotation de la monture du prisme, on peut imprimer à ce dernier trois mouvements qui permettent de rendre l'arête du prisme perpendiculaire à l'axe optique de l'objectif,

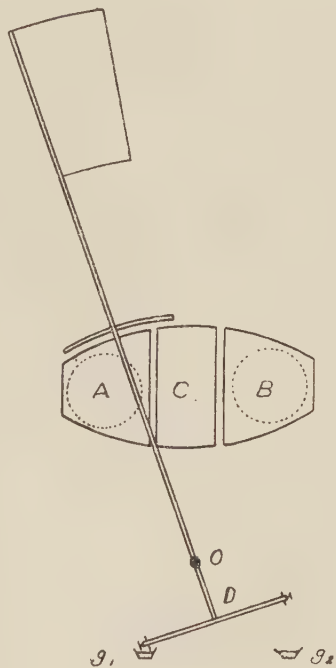


Fig. 10.

de la rendre horizontale, enfin de diriger le plan bissecteur du dièdre formé par les deux surfaces parallèlement à l'axe optique.

L'*oblurateur* est du même type que celui de l'instrument petit modèle, mais il ne possède qu'un seul volet.

Le levier de commande de ce volet, au lieu d'être horizontal comme dans l'instrument petit modèle, est mobile dans un plan vertical. Il entraîne dans son mouvement une lame de cuivre D portant à ses extrémités deux petites tiges de même métal qui peuvent plonger dans deux godets à mercure. Ces derniers, g_1 et g_2 , jouent le même rôle que les vis v_1 et v_2 de l'instrument petit modèle (fig. 9). Mais on conçoit que les instants où les contacts sont établis soient beaucoup mieux définis. En effet la lame D de la figure 9 vibre en frappant les vis v_1 et v_2 et ces vibrations sont d'autant plus accentuées que la durée de fermeture des volets est plus courte. Elles risquent de rendre incertain l'instant de l'établissement des contacts.

Les avantages de l'instrument grand modèle par rapport à l'instrument petit modèle sont de deux sortes :

1^o Augmentation du nombre d'étoiles observables due à ce que le diamètre de l'objectif est plus grand et à ce que l'angle du prisme est plus petit.

2^o Augmentation de la précision des mesures faites sur chaque étoile, due à ce que la vitesse linéaire des images sur le cliché est près de deux fois plus grande et à ce que les images de diffraction sont plus petites.

Un prisme d'angle 45 degrés, présente par rapport au prisme équilatéral l'inconvénient que, la hauteur des étoiles observables étant moindre, l'influence de la réfraction est plus grande. Mais cet inconvénient est largement compensé par l'augmentation du nombre des étoiles observables, que nous venons de signaler.

De plus l'emploi d'un prisme de 45 degrés apparaît dans nos latitudes avantageux par la possibilité qu'il donne d'observer des étoiles très voisines du pôle.

La liaison de ces appareils avec le chronographe et avec la pendule, a donné lieu à l'essai de divers montages qui ont successivement donné des résultats satisfaisants.

Dans les premiers essais, qui ont été faits à Paris, on s'est arrêté au suivant.

Montage de l'instrument petit modèle. — L'envoi du courant alternativement dans l'une et dans l'autre bobine de l'électro (fig. 11) est commandé par la pendule elle-même.

Celle-ci ouvre toutes les deux secondes rondes, pendant exactement une seconde, un circuit comprenant une pile et les primaires de deux translateurs. Le secondaire de l'un est sur le circuit du cadre mobile d'un chronographe. On a donc, à chaque seconde, alternativement ouverture et fermeture du circuit de la pendule, ce qui se traduit par une déviation de la plume du chronographe.

Le secondaire de l'autre translateur est sur un circuit comprenant

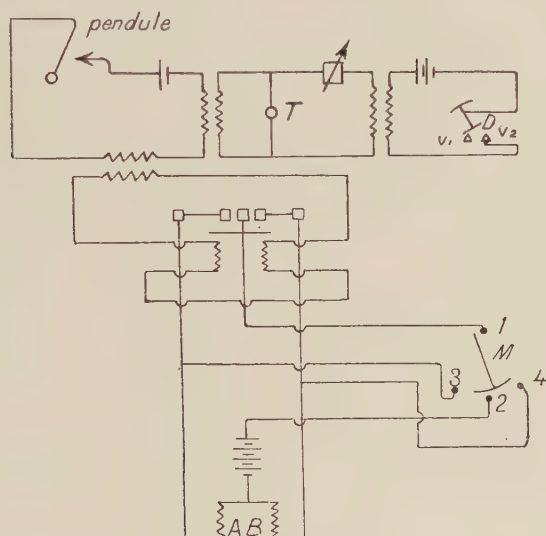


Fig. 11

les bobines d'un relai polarisé Baudot : quand la manette du combineur M est dirigée suivant les plots 1-2, le relai établit alternativement le courant à chaque seconde dans l'une et l'autre bobine A et B de l'électro-aimant (fig. 9). C'est ainsi que la pendule commande le mouvement des volets de l'obturateur.

Nous avons dit que dans ce mouvement, la lame D, solidaire du levier de commande des volets, vient alternativement en contact avec l'une des vis v_1 et v_2 .

Quand elle est au contact de la vis v_2 , elle ferme un circuit, comprenant une pile et le primaire d'un translateur dont le secondaire est sur le circuit du chronographe. Pour toute autre position de la lame D le

circuit est ouvert. Il se produit à chaque ouverture et fermeture du circuit une petite déviation du cadre mobile et par suite de la plume du chronographe.

On a donc sur la bande du chronographe une déviation de la plume à chaque seconde ronde de la pendule. On a aussi une déviation à chaque ouverture ou fermeture successives des volets. Ces deux déviations sont d'ailleurs très voisines. On peut apprécier sur la bande du chronographe le petit intervalle de temps qui les sépare. Cet intervalle de temps est, à moins d'un centième de seconde près, constant pendant toute une soirée d'observation. Il est de quelques centièmes de seconde. C'est le temps qui s'écoule entre l'établissement ou la rupture du courant de la pendule et la fermeture ou l'ouverture des volets. Cet intervalle de temps représente le retard de fermeture des volets, retard dû au relai et à l'électro-aimant.

Si l'on place la manette du combinateur de façon à relier les plots 2 et 4 le courant passe constamment dans la bobine B de l'électro-aimant, et les volets restent, par exemple, constamment fermés. Si l'on relie les plots 2 et 3, le courant traverse constamment la bobine A et les volets restent ouverts.

Si l'on supprimait la liaison des plots 1-2 pour la remplacer par 2-3 ou par 2-4, à des instants convenables on pourrait prolonger à volonté la durée d'ouverture ou de fermeture des volets.

Le combinateur à trois directions M permet donc à l'observateur de faire telle combinaison d'ouverture ou de fermeture qu'il veut.

Par exemple il pourra se proposer d'obtenir des ouvertures de volets d'une seconde suivies de fermetures de 3 secondes.

Pour cela il placera la manette du combinateur suivant 1 et 2. On aura alors alternativement à chaque seconde ouverture et fermeture des volets.

Immédiatement après une fermeture, l'observateur placera la manette suivant 2-4. Les volets resteront alors fermés. Au bout de deux secondes, il remettra la manette suivant 1-2, de façon à avoir successivement une ouverture et une fermeture. Immédiatement après cette fermeture il placera de nouveau la manette suivant 2-4 et maintiendra ainsi les volets fermés pendant 2 secondes; il placera encore la manette suivant 1-2, et ainsi de suite...

On voit donc que les ouvertures et fermetures se produisent aux secondes rondes, à la condition de faire basculer la manette du combinateur suivant 2-4, immédiatement après la fermeture des volets et

de la ramener suivant 1-2 avant que le jeu du relai ne provoque leur ouverture.

L'observateur entend, dans un téléphone T placé en dérivation sur le circuit du chronographe, à la fois les secondes de la pendule, et l'ouverture ou la fermeture des volets. L'ouverture ne produit d'ailleurs pas le même bruit que la fermeture. Il sait donc immédiatement dans quelle position il doit placer à chaque instant la manette du combinateur.

Si l'on veut que les ouvertures et les fermetures aient lieu aux secondes rondes, on est astreint à leur donner des durées d'un nombre impair de secondes. Cette nécessité ne présente d'ailleurs pas d'inconvénient grave.

Avec l'instrument d'un mètre de foyer, on sera conduit à faire des traits d'une seconde suivis d'interruptions d'une seconde pour les étoiles à mouvement rapide (voisines du méridien au sud ; déclinaison faible). Pour les étoiles plus lentes (voisines du premier vertical) on fera des traits d'une seconde suivis d'interruptions de trois secondes. Enfin, pour les étoiles plus lentes encore (voisines du pôle) on fera des traits d'une seconde suivis d'interruptions de cinq secondes et même de sept secondes si cela est nécessaire.

On évitera ainsi, nous le verrons, que les traits consécutifs n'empiètent les uns sur les autres, ce qui correspondrait à de mauvaises conditions pour les mesures.

Par contre il ne semble pas que l'on gagne à avoir des durées d'ouverture de volets de plus d'une seconde. On allonge alors inutilement les traînées de l'étoile sur la plaque. Si cependant on pouvait avoir quelquefois intérêt à le faire ce ne serait que dans le cas d'étoiles très faibles et à mouvement très lent (voisines du pôle).

Avec l'instrument grand modèle, on peut sans inconvénient, pour les étoiles observées au sud et au voisinage du premier vertical, faire des ouvertures de volets d'une seconde de durée, suivies de fermetures égales.

C'est encore là un avantage très appréciable de l'appareil grand modèle employé pour la détermination de l'heure car les étoiles les plus favorables à cette détermination sont précisément les plus voisines du premier vertical. Donc dans toute opération faite avec cet instrument et si l'on ne se propose pas la détermination de la latitude, l'emploi du combinateur est inutile. On peut alors relier en permanence les plots 1 et 2.

Lecture de la bande du chronographe. — Nous avons dit que l'on observe sur la bande du chronographe une déviation de la plume cor-

respondant à chaque seconde ronde c'est-à-dire à chaque ouverture et à chaque fermeture du circuit de la pendule. Le contact de la pendule dure en effet chaque fois une seconde, et il est suivi d'une interruption qui dure aussi une seconde. Mais, par suite de la distribution de ces contacts sur la pendule, cette interruption, après la seconde 58 de chaque minute, dure trois secondes, pendant lesquelles naturellement les volets de l'obturateur restent fermés. Il n'y a donc pas sur la bande de déviations relatives aux secondes 59 et 0. On pourra chiffrer les déviations successives de la plume ; la première après l'interruption correspondant à la seconde 1, etc.

Nous avons dit aussi que l'on observe une déviation de la plume correspondant à chaque contact de la vis de butée v_2 avec la palette D où à chaque rupture de ces contacts. Ces déviations se produisent d'ailleurs presque aux secondes rondes, et l'on constate que l'intervalle de temps qui les en sépare est à peu près constant pour toutes les ouvertures et pour toutes les fermetures des volets dans le cours d'une même soirée. Pourtant, avec le montage qui vient d'être décrit, il est un peu différent pour les secondes paires et les secondes impaires. Cette différence est due surtout à ce que la fermeture et l'ouverture des volets ne sont pas instantanées. Pour mesurer leurs durées, il suffit de relier les vis v_1 et v_2 . Quand la lame D quitte le contact de la vis v_2 on a une déviation de la plume. Quand elle arrive au contact de la vis v_1 on a une nouvelle déviation. La distance des deux coches correspondantes sur la bande du chronographe mesure la durée de fermeture des volets.

De tout ce qui précède, il découle que l'on peut sans inconvénient faire les lectures sur la bande comme si les ouvertures et les fermetures des volets étaient instantanées, et avaient lieu aux secondes rondes et corriger ensuite en conséquence la correction de pendule déduite de l'ensemble des observations de la soirée.

Dans les essais qui ont été faits tout d'abord avec l'instrument petit modèle on a utilisé un enregistreur Abraham.

Cet enregistreur est un galvanomètre à cadre mobile, composé d'un électro-aimant puissant dans l'entrefer duquel peut se déplacer un cadre qui entraîne dans son mouvement une plume. Celle-ci inscrit ses déplacements sur une bande de papier qui se déroule d'un mouvement continu et uniforme, sous l'action d'un mouvement d'horlogerie. C'est donc un enregistreur à une seule plume. Placé sur un circuit électrique quelconque, il inscrit toutes les variations d'intensité qui sont produites dans ce circuit.

Il a été monté ainsi que l'indique le schéma de la figure 11 où l'on aurait relié les vis v_1 et v_2 .

La figure 12 représente une portion de bande où l'on peut lire les secondes 58, 1 et 2. Ainsi que nous l'avons déjà dit, les secondes 59 et 0 manquent. Considérons par exemple la seconde 2 : le point A cor-
pond à la seconde ronde ; le point B, au départ des volets. Enfin la durée d'ouverture ou de fermeture des volets est au plus égale au temps qui est représenté par la largeur de la coche correspondante BC sur la bande. Le frottement de la plume sur le papier et le lancement qu'elle éprouve à l'instant de l'établissement du contact v_1 ou de la rupture du contact v_2 , rendent, il est vrai, cette dernière mesure un peu incertaine.



Fig. 12.

pond à la seconde ronde ; le point B, au départ des volets. Enfin la durée d'ouverture ou de fermeture des volets est au plus égale au temps qui est représenté par la largeur de la coche correspondante BC sur la bande. Le frottement de la plume sur le papier et le lancement qu'elle éprouve à l'instant de l'établissement du contact v_1 ou de la rupture du contact v_2 , rendent, il est vrai, cette dernière mesure un peu incertaine.

Montage de l'instrument grand modèle de l'Observatoire de Nice. —

A l'Observatoire de Nice, il n'existait pas d'oscillographe Abraham. Nous avons utilisé un enregistreur du type TM qui a été employé

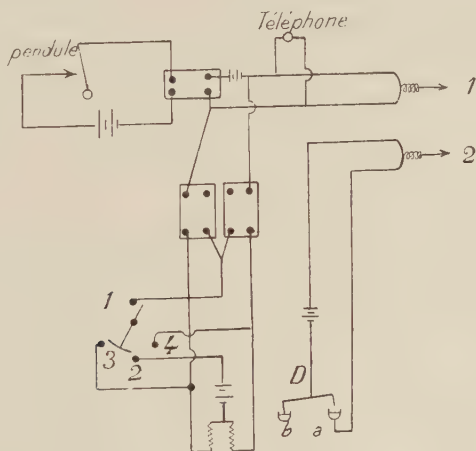


Fig. 13.

pendant la guerre par le Service Géographique pour le repérage par le son (un style commandé par un petit oscillographe inscrit ses déplacements sur une bande de papier enfumé qui se déroule).

Le schéma général est le suivant (fig. 13) : le circuit pendule ferme

toutes les deux secondes pendant une seconde un circuit comprenant une pile et le primaire d'un relai.

Sur le secondaire de ce relai sont montés en parallèle : *a*) un circuit comprenant un oscillographe TM que nous désignerons par 1, *b*) les primaires de 2 relais Claude opposés montés en série.

Les secondaires de ces relais sont montés exactement comme le relai Baudot de la figure 11.

Toutes les secondes les volets sont donc alternativement ouvertes fermés.

Toutes les deux secondes, le contact *a* ferme un circuit secondaire comprenant un second oscillographe : 2. Dans la seconde suivante le circuit est ouvert. Tout se passe donc pour la mesure des retards comme pour la figure 11. Mais ici on a 2 plumes distinctes, pour la pendule et pour le contact *a*, ce qui n'a d'autre inconvénient que d'obliger à déterminer la parallaxe des plumes.

L'objectif ayant une distance focale assez grande, on peut, pour les étoiles observées au sud et au voisinage du premier vertical donner aux ouvertures et aux fermetures du volet des durées égales d'une seconde.

C'est encore là un avantage très appréciable de l'instrument grand modèle employé pour la détermination de l'heure, car les étoiles les plus favorables sont précisément les plus voisines du premier vertical. Dans toute opération de ce genre faite avec cet instrument, et si l'on ne se propose pas de déterminer la latitude, l'emploi du combinateur est donc inutile : on peut relier en permanence les plots 1 et 2.

Suppression du chronographe. — Supposons la manette placée suivant les plots 1-2. On aura sur la plaque une série de points équidistants, correspondant à des intervalles de temps de 2 secondes. Les volets de l'obturateur s'ouvrent et se ferment à chaque seconde sauf à la seconde 59 et à la seconde 0 de la pendule, pendant lesquelles ils restent à la même position où ils étaient à la seconde 58 de la minute précédente. On s'arrange de préférence pour que, pendant ces deux secondes, les volets restent fermés.

On a donc, sur la plaque, une série de traits équidistants, dont les milieux se succèdent à des intervalles de temps de 2 secondes.

Si les secondes successives sont désignées par 0, 1, 2, 3, 4, 5..., les milieux des traits consécutifs correspondent aux temps $\frac{1+2}{2}$, $\frac{3+4}{2}$...

ou 1^s5, 3^s5, 5^s5, etc. Mais le trait correspondant à 59^s5 manque puisque les volets sont restés fermés pendant les secondes 59 et 0.

Il s'ensuit que l'examen de la succession des traits supplée le chronographe puisque l'on sait *a priori* quelle heure correspond à chacun d'eux : ainsi le troisième trait à partir de l'interruption se rapporte à la seconde 5,5, le 9^e à la seconde 17,5, le $n^{\text{ième}}$ à la seconde $(2n - 0,5)$.

Il en est de même pour d'autres positions du combinateur. Si, par exemple, on donne aux volets des ouvertures de 1 seconde suivies de fermetures de 3 secondes, on aura pendant chaque minute 14 traits au lieu de 29, et une interruption de 5 secondes au lieu d'une interruption de 3 secondes.

Une cause de confusion pourra pourtant exister. Les traînées présenteront, en effet, un aspect tout à fait analogue, soit que la dernière fermeture ait lieu à la seconde 58 et l'ouverture suivante à la seconde 4, soit que la dernière fermeture ait lieu à la seconde 56, et l'ouverture suivante à la seconde 2.

Pour éviter cette confusion, il sera prudent, au voisinage de la seconde 52, de diriger la manette du combinateur suivant la ligne 1-2 et de laisser le mouvement des volets se faire de seconde en seconde, jusqu'après l'interruption. On reprendra ensuite le rythme primitif. L'interruption n'étant plus alors que de 3 secondes, il n'y aura plus d'ambiguïté possible sur l'heure à laquelle elle se produit.

L'emploi constant du chronographe pendant les observations est donc inutile. Mais cet instrument est un auxiliaire indispensable pour la mesure (qui doit être faite fréquemment) du retard d'ouverture et de fermeture des volets.

Calcul des heures relatives aux différents points des deux traînées, en tenant compte des retards d'ouverture et de fermeture du volet et de la durée de ces ouvertures et fermetures. — Reprenons le schéma de la figure 13. Quand la palette D quitte le contact *a*, le style du chronographe (oscillographe 2) inscrit une coche sur la bande. Soient T_0 la seconde ronde correspondante et r le retard d'ouverture ; l'heure lue sur la bande est $T_0 + r$. Mais, à cet instant, les faisceaux lumineux qui produisent les images ne sont pas encore découverts par le volet. Il s'écoule encore pour cela un temps τ . L'heure correspondant au début du trait est donc

$$T_0 + r + \tau.$$

A la seconde suivante, la palette D revient au contact de a . Elle y arrive à l'heure $T_0 + 1^s + r'$, r étant le nouveau retard qui n'est pas le même pour les secondes paires et pour les secondes impaires. Mais à cet instant, les faisceaux qui fournissent les deux images ont déjà été obturés depuis un temps τ' sensiblement égal à τ . L'heure de la fin du trait est donc

$$T_0 + 1^s + r' - \tau.$$

L'heure du début du trait suivant est

$$T_0 + 2^s + r + \tau..., \text{ etc.}$$

Les heures des milieux des traits successifs sont :

$$T_0 + 0^s,5 + \frac{r + r'}{2} \quad T_0 + 2^s,5 + \frac{r + r'}{2}, \text{ etc.}$$

Adoptons pour T_0 la valeur qui se rapporte au début du premier trait de chaque minute :

$$T_0 = M_{\text{minutes}} + 1^{\text{seconde}}.$$

L'expression générale de l'heure du milieu d'un trait dont le numéro d'ordre à partir de l'interruption précédente est n est :

$$H = M + 2n - 0^s,5 + \frac{r + r'}{2}.$$

H est donc la somme de la moyenne des secondes rondes relatives au début et à la fin de chaque trait, et de la moyenne des retards r et r' .

Quant à la durée d d'ouverture ou de fermeture du volet, elle semble être entièrement éliminée. Elle ne l'est que si l'on mesure r et r' , car on a aussi

$$r' - r = d$$

$$\frac{r' + r}{2} = r + \frac{d}{2}$$

$$H = M + 2n - 0^s,5 + r + \frac{d}{2}.$$

Mais la mesure de r' est plus facile à faire que celle de d .

On peut donc s'arranger pour que l'heure conclue ne dépende pas de la position des images sur la plaque. Il n'en serait pas ainsi si au lieu de pointer les milieux des différents traits nous avions pointé leurs extrémités.

Nous avons admis dans ce qui précède que les durées d'ouverture et de fermeture du volet sont égales. L'expérience prouve qu'elles ne

dépassent guère $\frac{2}{100}$ de seconde et que leurs variations sont insignifiantes. On s'assurera d'ailleurs qu'il en est ainsi en faisant des mesures fréquentes des quantités r , r' et d .

Qualité des images. — Dans de bonnes conditions d'observation, les images sont de petits traits rectilignes assez nets pour l'instrument grand modèle, des petits points assez bien piqués pour l'instrument petit modèle. Avec ce dernier on n'a des traits que pour les étoiles observées au sud.

Nous étudierons, à la fin de ce travail, la question de la forme et de la qualité des images. Nous pouvons pourtant dire ici que jamais, même sur les meilleurs clichés, on n'a des débuts et des fins de traits nets. Les images sont arrondies et un peu floues aux deux extrémités. Aussi ne doit-on pas, avec la machine de mesure, pointer le début et la fin de chaque trait mais on l'encadrera de préférence entre une couple de fils convenablement serrés, ce qui revient à pointer son milieu.

L'image directe était d'abord sur la plaque plus brillante que l'image réfléchie. Ce fait était dû à ce que le faisceau direct ne subit qu'une réflexion (sur la face supérieure du prisme) alors que le faisceau réfléchi en subit deux, l'une sur le bain de mercure, l'autre sur la face inférieure du prisme. Il arrivait même que les étoiles faibles donnaient une traînée directe et pas de traînée réfléchie. Le pouvoir réflecteur du mercure est environ 0,6. On peut égaliser les deux images en s'arrangeant pour que le faisceau direct soit fourni par une portion de l'objectif plus faible que celle qui fournit le faisceau réfléchi, le rapport de l'une à l'autre étant $\frac{6}{10}$. J'ai été ainsi conduit à décaler le prisme, de façon

que son arête, au lieu d'être projetée par le faisceau lumineux sur un diamètre de l'objectif le soit sur une corde dont l'apothème a environ 1 cm. de longueur pour l'instrument petit modèle, un peu moins de 2 cm. pour l'instrument grand modèle. Le résultat cherché a pu ainsi être obtenu. L'éclat limite des étoiles observables a été, par surcroît reculé de quelques dixièmes de grandeur.

Intensité des traînées sur la plaque. — Avec l'instrument petit modèle je n'ai pas pu photographier des étoiles plus faibles que celles de troisième grandeur. Avec l'instrument grand modèle j'ai pu atteindre celles de grandeur 4,5.

L'intensité des traînées sur la plaque dépend de trois facteurs :

l'éclat propre de l'étoile, la vitesse linéaire des images et la sensibilité de la plaque.

a) L'éclat des étoiles varie d'une soirée à une autre. Aussi le nombre des étoiles observables est accru quand l'atmosphère est pure.

b) La vitesse linéaire des images est d'autant plus grande que la déclinaison de l'étoile est plus faible. On pourra donc observer des étoiles plus faibles au nord qu'au sud.

c) Il y a intérêt à rendre les intensités des images comparables pour tous les clichés. On ne peut songer à diaphragmer pour cela l'objectif car, chacune des images n'étant fournie que par une moitié de celui-ci, on risquerait, en passant d'un diaphragme à un autre, d'introduire des erreurs dans le résultat des mesures. Peut-être l'emploi d'écrans d'opacité variable pourrait-il être envisagé. En tout cas, on peut se rapprocher simplement du résultat cherché, en employant pour les diverses étoiles des plaques de sensibilité différente. Si l'on adopte les plaques Lumière, on a une échelle de sensibilité croissante en employant les quatre marques suivantes :

Lumière « étiquette bleue »	sensibilité 1
— « Portrait A »	— 3
— « Σ »	— 6
— « étiquette violette »	— 9

Vibrations du bain de mercure. — Dans la disposition primitive, le bain de mercure était supporté directement par un bras en fonte fixé sur le bâti de l'instrument. Celui-ci avait été placé sur la terrasse de l'Observatoire de Paris. Les images, observées visuellement, étaient assez bonnes. Sur le cliché, la traînée directe était nette, la traînée réfléchie complètement floue : le bain, bien qu'à couche très mince, vibrât continuellement sous l'influence des trépidations du sol, causées par la proximité des rues de Paris (tramways, camions, etc.). Ces vibrations auraient certainement permis de faire des mesures visuelles passables, mais les photographies étaient inutilisables.

J'ai obtenu un bon résultat en faisant flotter la cuvette du bain de mercure sur un second bain à couche très épaisse. Les vibrations du sol se transmettent très faiblement à ce second bain sans affecter le premier, qui reste absolument calme. J'ai pu, depuis lors, obtenir de bons clichés.

Il est pourtant nécessaire, pour atteindre ce résultat, de caler la lunette à l'azimut de l'étoile assez longtemps avant de photographier

celle-ci. Quand on néglige de le faire, on a souvent, sur la traînée réfléchie des alternances de traits nets et de traits flous, disposés d'une façon nettement périodique. Quand les traînées sont longues, les zones floues vont en s'atténuant du début à la fin et finissent par disparaître complètement. Leur présence est due à ce que la surface du mercure, agitée



Fig. 14.

par les secousses données à l'instrument au moment du calage, n'est pas encore au repos lorsque la plaque commence à être impressionnée.

Les vibrations du mercure peuvent aussi être produites par le vent. J'ai protégé le bain par des panneaux fixés contre lui et l'entourant complètement, et aussi par une grande bâche d'environ 2 m. de hauteur portée par des piquets plantés en terre tout autour de l'instrument.

CHAPITRE II

THÉORIE DE L'INSTRUMENT PHOTOGRAPHIQUE DES HAUTEURS ÉGALES

La question posée est la suivante :

1^o Connaissant la position sur un cliché d'une série de couples de points correspondants et les heures relatives à ces points, en déduire l'heure de la coïncidence des images.

2^o Connaissant les heures de coïncidence des images pour toute une série d'étoiles, déduire la correction de pendule et la latitude.

Mais d'abord faut-il définir ce que l'on appelle coïncidence :

Pas plus dans l'instrument dont il est ici question que dans l'astrolabe à prisme, les images ne coïncident. Elles passent seulement l'une près de l'autre.

Dans l'astrolabe à prisme de MM. Claude et Driencourt, l'arête du prisme est presque rigoureusement perpendiculaire à l'axe optique de la lunette, car ce réglage a été fait par autocollimation sur la face arrière du prisme, qui est, par construction, parallèle aux arêtes. Ici, on n'a pas eu cette facilité, l'arête du prisme étant contre l'objectif. On peut admettre seulement que la coïncidence a lieu à peu près au milieu du champ.

Il est donc nécessaire, avant toutes choses, d'examiner analytiquement ce qui se passe, en d'autres termes, de faire la théorie mathématique de l'appareil.

Nous examinerons successivement les divers problèmes qui se posent pour parvenir à la solution complète de la question.

PREMIER PROBLÈME

**Ayant le rayon incident sur la face supérieure du prisme,
trouver le rayon réfléchi sur cette face.**

Axes de coordonnées. — Soient (fig. 15) :

- $\left\{ \begin{array}{l} O \text{ le centre optique de l'objectif} \\ O x \text{ l'axe optique, supposé horizontal, et perpendiculaire à l'arête} \\ \quad AA \text{ du prisme} \\ O z \text{ la verticale en } O \\ O y \text{ la perpendiculaire au plan } z O x \text{ en } O. \end{array} \right.$

Soit P le prisme placé devant l'objectif. Son arête AA a été rendue, par réglage, presque horizontale. Elle est, nous venons de le dire, perpendiculaire à Ox . Elle est donc à peu près parallèle à Oy . — De plus, les faces du prisme sont inclinées de telle sorte que le plan bissecteur du dièdre A est à peu près horizontal. Soit $2V$ la valeur de ce dièdre.

Soit I un rayon incident sur la face supérieure du prisme, N la normale au point d'incidence, R le rayon réfléchi correspondant.

Quantités définissant la position de la face supérieure du prisme. — La normale N fait avec le plan yOz un angle voisin de V , soit $V + \sigma$ (σ est l'angle que fait l'axe Ox avec le plan bissecteur du dièdre $\hat{A}$). — Elle fait donc avec l'axe Ox un angle égal à $90^\circ - V - \sigma$.

La projection de N sur le plan yOz fait avec l'axe Oz un angle i

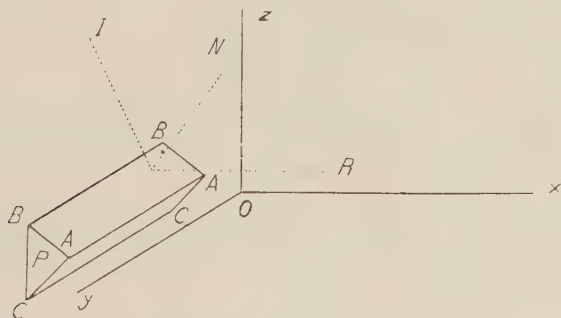


Fig. 15.

égal à l'inclinaison de l'arête du prisme. Elle fait avec Oy un angle égal à $90^\circ - i$.

Soient λ , μ , ν les cosinus directeurs de N. — On a :

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda = \sin (V + \sigma) \\ \mu = \cos (V + \sigma) \sin i \\ \nu = \cos (V + \sigma) \cos i. \end{cases}$$

Si l'on conserve les carrés de σ et de i , ces relations peuvent s'écrire :

$$(1 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \lambda = \sin V + \sigma \cos V - \frac{\sigma^2}{2} \sin V \\ \mu = i \cos V - i \sigma \sin V \\ \nu = \cos V - \sigma \sin V - \frac{i^2 + \sigma^2}{2} \cos V. \end{cases}$$

Positions relatives de la lunette et de l'étoile. — Soit Ψ l'angle que fait avec le méridien la partie négative de l'axe des x .

Soit A l'azimut de l'étoile.

Ces deux angles sont comptés à partir du nord.

$$(2) \quad \text{Posons} \quad \Psi - A = \omega \quad \omega \text{ étant petit}$$

Soit R la quantité dont la hauteur vraie h de l'étoile est relevée, du fait de la réfraction, quand sa hauteur apparente est $2V$. Nous désignerons par $R - \rho$ cette « réfraction » quand la hauteur apparente de l'étoile est $2V + \varepsilon$.

$$(3) \quad \text{On a} \quad h = 2V - R + \varepsilon + \rho.$$

$2V - R$ est une constante pour tous les points du cliché. La somme $\varepsilon + \rho$ est différente pour chaque point. — Enfin, la quantité R varie d'un cliché à un autre lorsque les conditions atmosphériques varient.

La hauteur apparente de l'étoile est

$$h + R - \rho = 2V + \varepsilon.$$

Le rayon incident fait donc avec le plan xOy un angle égal à $2V + \varepsilon$.

Sa projection sur le plan xOy fait avec Ox un angle égal à $180^\circ - \omega$.

Rayon incident. — Soient u, v, w , les cosinus directeurs du rayon incident. On a

$$(4) \quad \begin{cases} u = -\cos(2V + \varepsilon) \cos \omega \\ v = \cos(2V + \varepsilon) \sin \omega \\ w = \sin(2V + \varepsilon) \end{cases}$$

ou, en ne conservant encore que les termes du premier et du second ordre :

$$(4 \text{ bis}) \quad \begin{cases} u = -\cos 2V + \varepsilon \sin 2V + \frac{\omega^2 + \varepsilon^2}{2} \cos 2V \\ v = \omega \cos 2V - \omega \varepsilon \sin 2V \\ w = \sin 2V + \varepsilon \cos 2V - \frac{\varepsilon^2}{2} \sin 2V. \end{cases}$$

Dans ce qui précède nous avons désigné par u, v, w , les cosinus directeurs du rayon incident par λ, μ, ν , ceux de la normale à la face supérieure du prisme.

Nous désignerons par φ, χ, ψ ceux du rayon réfléchi sur cette face.

Direction du rayon réfléchi sur la face supérieure du prisme. — Menons par l'origine des parallèles à ces trois directions. — Prenons sur les parallèles au rayon incident et au rayon réfléchi des distances égales à

l'unité. On aura ainsi deux points de coordonnées $u, v, w, \varphi, \chi, \psi$, dont le milieu se trouve sur la direction parallèle à la normale (λ, μ, ν) .

On a

$$\frac{\frac{u+\varphi}{2}}{\lambda} = \frac{\frac{v+\chi}{2}}{\mu} = \frac{\frac{w+\psi}{2}}{\nu} = \frac{u\lambda + v\mu + w\nu + \varphi\lambda + \chi\mu + \psi\nu}{2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)}.$$

Mais, l'angle d'incidence étant égal à l'angle de réflexion, on a :

$$u\lambda + v\mu + w\nu = \varphi\lambda + \chi\mu + \psi\nu.$$

Donc

$$\frac{u+\varphi}{\lambda} = \frac{v+\chi}{\mu} = \frac{w+\psi}{\nu} = 2(u\lambda + v\mu + w\nu).$$

Par suite, on a

$$(5) \quad \begin{cases} \varphi = 2\lambda(u\lambda + v\mu + w\nu) - u \\ \chi = 2\mu(u\lambda + v\mu + w\nu) - v \\ \psi = 2\nu(u\lambda + v\mu + w\nu) - w \end{cases}$$

Si l'on néglige toujours les termes du troisième ordre, on trouve aisément que

$$\begin{aligned} u\lambda + v\mu + w\nu &= \sin V + \varepsilon \cos V - \sigma \cos V - \frac{\varepsilon^2 + \sigma^2 - 2\varepsilon\sigma}{2} \sin V \\ &+ \frac{\omega^2}{2} \sin V \cos 2V - \frac{i^2}{2} \cos V \sin 2V + i\omega \cos V \cos 2V \end{aligned}$$

et par suite

$$(6) \quad \begin{cases} \varphi = 1 - \frac{1}{2}(\varphi - 2\sigma)^2 - \frac{1}{2}(\omega \cos 2V - i \sin 2V)^2 \\ \chi = i \sin 2V - \omega \cos 2V - i(2\sigma - \varepsilon) + i\varepsilon \cos 2V + \omega\varepsilon \sin 2V \\ \psi = \varepsilon - 2\sigma + \frac{\omega^2 - i^2}{4} \sin 4V + 2\omega i \cos^2 V \cos 2V - i^2 \sin 2V. \end{cases}$$

DEUXIÈME PROBLÈME

**Ayant le rayon incident sur la face inférieure du prisme,
trouver le rayon réfléchi sur cette face.**

Ce problème est le même que le précédent, mais la première face est remplacée par la seconde, et le rayon incident est remplacé par son symétrique par rapport à la surface du bain de mercure.

Position de la face inférieure du prisme. — Nous calculerons les cosinus directeurs $\lambda' \mu' \nu'$ de la normale N' à cette face. — Cette normale

fait avec Ox un angle égal à $90^\circ - V + \sigma$. Elle fait avec le plan yOz un angle égal à $V - \sigma$. — Sa projection sur le plan yOz fait avec Oz l'angle $180^\circ + i$ et avec Oy l'angle $90^\circ + i$.

On a

$$(7) \quad \begin{cases} \lambda' = \sin(V - \sigma) \\ \mu' = -\cos(V - \sigma) \sin i \\ \nu' = -\cos(V - \sigma) \cos i \end{cases}$$

que l'on peut écrire, en négligeant les termes du troisième ordre :

$$(7 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \lambda' = \sin V - \sigma \cos V - \frac{\sigma^2}{2} \sin V \\ \mu' = -i \cos V - i \sigma \sin V \\ \nu' = -\cos V - \sigma \sin V + \frac{\sigma^2 + i^2}{2} \cos V \end{cases}$$

Vérification. — On doit avoir

$$(8) \quad \lambda \lambda' + \mu \mu' + \nu \nu' = \cos(180^\circ - 2V) = -\cos 2V.$$

C'est bien ce que vérifient les valeurs trouvées pour $\lambda \mu \nu$, $\lambda' \mu' \nu'$.

REMARQUE. — On passe de $\lambda \mu \nu$ à $\lambda' \mu' \nu'$ en changeant σ en $-\sigma$ et en changeant les signes de μ et de ν .

Second rayon incident (réfléchi par la surface du mercure). — Soient $u' v' w'$ les cosinus directeurs du rayon incident, réfléchi par le bain de mercure. — Ce rayon a même azimut que le premier rayon incident. Sa hauteur est égale et de signe contraire à celle du premier.

On a

$$(9) \quad \begin{cases} u' = u = -\cos(2V + \varepsilon) \cos \omega = -\cos 2V + \varepsilon \sin 2V + \frac{\omega^2 + \varepsilon^2}{2} \cos 2V \\ v' = v = \cos(2V + \varepsilon) \sin \omega = \omega \cos 2V - \omega \varepsilon \sin 2V \\ w' = -w = -\sin(2V + \varepsilon) = -\sin 2V - \varepsilon \cos 2V + \frac{\varepsilon^2}{2} \sin 2V. \end{cases}$$

Rayon réfléchi par la face inférieure du prisme. — Soient $\varphi' \chi' \psi'$ les cosinus directeurs du rayon réfléchi. On a, comme dans le premier cas :

$$(10) \quad \begin{cases} \varphi' = 2\lambda'(u'\lambda' + v'\mu' + w'\nu') - u' \\ \chi' = 2\mu'(u'\lambda' + v'\mu' + w'\nu') - v' \\ \psi' = 2\nu'(u'\lambda' + v'\mu' + w'\nu') - w'. \end{cases}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} u'\lambda' + v'\mu' + w'\nu' &= \sin V + (\sigma + \varepsilon) \cos V - \frac{(\sigma + \varepsilon)^2}{2} \sin V + \frac{\omega^2}{2} \sin V \cos 2V \\ &\quad - \frac{i^2}{2} \cos V \sin 2V - i \omega \cos V \cos 2V. \end{aligned}$$

Il vient enfin

$$(11) \quad \begin{cases} \varphi' = 1 - \frac{1}{2} (\varepsilon + 2 \sigma)^2 - \frac{1}{2} (\omega \cos 2 V + i \sin 2 V)^2 \\ \chi' = -i \sin 2 V - \omega \cos 2 V - i (2 \sigma + \varepsilon) - i \varepsilon \cos 2 V + \omega \varepsilon \sin 2 V \\ \psi' = -\varepsilon - 2 \sigma - \frac{\omega^2 - i^2}{4} \sin 4 V + 2 i \omega \cos^2 V \cos 2 V + i^2 \sin 2 V. \end{cases}$$

TROISIÈME PROBLÈME

Coordonnées des points d'intersection des rayons réfléchis et de la plaque.

Menons, par le centre optique, des parallèles aux deux rayons réfléchis. Elles ont pour équations :

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{x}{\varphi} = \frac{y}{\chi} = \frac{z}{\psi} \\ \frac{x}{\varphi'} = \frac{y}{\chi'} = \frac{z}{\psi'} \end{cases}$$

Elles coupent le plan focal en des points dont les coordonnées sont

$$\begin{aligned} X &= f & Y &= \frac{\chi}{\varphi} f & Z &= \frac{\psi}{\varphi} f \\ X' &= f & Y' &= \frac{\chi'}{\varphi'} f & Z' &= \frac{\psi'}{\varphi'} f. \end{aligned}$$

φ, φ' ne diffèrent de l'unité que par des termes du deuxième ordre ; χ, χ', ψ, ψ' sont du premier ordre. On a donc, en négligeant les termes du troisième ordre

$$(13) \quad \begin{cases} Y = \chi f & Z = \psi f \\ Y' = \chi' f & Z' = \psi' f \end{cases}$$

et

$$Y' - Y = (\chi' - \chi) f \quad Z' - Z = (\psi' - \psi) f.$$

Par suite

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{Y' - Y}{f} = -2 i \sin 2 V - 4 i \varepsilon \cos^2 V = -4 i \cos V (\sin V + \varepsilon \cos V) \\ \frac{Z' - Z}{f} = -2 \varepsilon - \frac{\omega^2 - i^2}{2} \sin 4 V + 2 i^2 \sin 2 V. \end{cases}$$

QUATRIÈME PROBLÈME

Étude de la corrélation des deux images quand on néglige les termes du second ordre.

Si l'on néglige les termes du second ordre, les relations précédentes se réduisent à

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{Y' - Y}{f} = -2 i \sin 2 V \\ \frac{Z' - Z}{f} = -2 \varepsilon. \end{array} \right.$$

Pour un même cliché, la distance horizontale des images, $Y' - Y$, est donc constante, leur distance verticale $Z' - Z$ varie comme $-2 f \varepsilon$.

La hauteur vraie de l'étoile à un moment quelconque pendant l'observation est

$$(3) \quad h = 2 V - R + \varepsilon + \rho.$$

Si t est l'heure sidérale à cet instant et α l'ascension droite de l'étoile, l'angle horaire est $t - \alpha$ si l'étoile est à l'ouest.

La considération du triangle sphérique pôle-zénith-étoile, montre que l'on a

$$(16) \quad \sin (2 V - R + \varepsilon + \rho) = \sin \Phi \sin \delta + \cos \Phi \cos \delta \cos (t - \alpha)$$

où Φ désigne la latitude du lieu et δ la déclinaison de l'étoile.

ρ est une quantité très petite. Dans le cas d'un prisme équilatéral, il est de $0''23$ pour $\varepsilon = 10'$. On peut donc admettre qu'il varie proportionnellement à ε . On peut écrire

$$\rho = K \varepsilon$$

où K est une constante très petite.

Posons

$$2 V - R = 2 U.$$

La relation (16) devient

$$\sin [2 U + (K + 1) \varepsilon] = \sin \Phi \sin \delta - \cos \Phi \cos \delta \cos (\alpha - t).$$

Négligeant les termes du second ordre en ε , on a

$$\sin 2 U + (K + 1) \varepsilon \cos 2 U = \sin \Phi \sin \delta - \cos \Phi \cos \delta \cos (\alpha - t)$$

et

$$\frac{Z' - Z}{f} = -2 \varepsilon = \frac{2 \operatorname{tg} 2 U}{1 + K} - \frac{2 \sin \Phi \sin \delta}{(1 + K) \cos 2 U} - 2 \cos \Phi \cos \delta \frac{\cos (\alpha - t)}{(1 + K) \cos 2 U}.$$

Aux termes du second ordre près $\frac{Z' - Z}{f}$ varie proportionnellement au temps. Nous supposons donc dans cette première approximation qu'il en est ainsi.

$Y' - Y$ est une constante.

Le lieu des points (Y, Z) sur la plaque est

$$Y = f \chi \quad Z = f \psi.$$

Le lieu des points (Y', Z') est

$$Y' = f \chi' \quad Z' = f \psi'.$$

Nous conviendrons d'appeler heure de coïncidence l'instant où $\varepsilon = 0$.
— Naturellement, cette définition sera maintenue, que l'on se borne ou non aux termes du premier ordre.

Mais, si l'on ne conserve que ces derniers, on peut dire, à cause de l'équation 15, qu'à l'instant de la coïncidence

$$(18) \quad Z' - Z = 0.$$

Les deux images se trouvent donc, à cet instant (en première approximation) simultanément sur une même horizontale. Elles ont alors, sur la plaque, pour coordonnées, d'après les relations 6, 11 et 13

$$(19) \quad \begin{cases} Y_0 = f [i \sin 2 V - \omega_0 \cos 2 V] & Z_0 = -2 f \sigma \\ Y'_0 = f [-i \sin 2 V - \omega_0 \cos 2 V] & Z'_0 = -2 f \sigma \end{cases}$$

où ω_0 désigne la valeur de ω à l'instant de la coïncidence.

Les coordonnées de deux points correspondants à un instant quelconque sont

$$(19 \text{ bis}) \quad \begin{cases} Y_1 = f [i \sin 2 V - \omega \cos 2 V] & Z_1 = -2 f \sigma + f \varepsilon \\ Y'_1 = f [-i \sin 2 V - \omega \cos 2 V] & Z'_1 = -2 f \sigma - f \varepsilon. \end{cases}$$

Le milieu de ces deux points correspondants a pour coordonnées :

1° Dans le cas général

$$(20) \quad \begin{cases} Y = -f \omega \cos 2 V \\ Z = -2 f \sigma. \end{cases}$$

2° Dans le cas de la coïncidence

$$(20 \text{ bis}) \quad \begin{cases} Y = -f \omega_0 \cos 2 V \\ Z = -2 f \sigma. \end{cases}$$

Il s'ensuit que :

(a) Le point de coïncidence, sur chaque traînée est le point d'inter-

section de la traînée avec la droite qui joint les milieux des points correspondants des deux traînées.

(b) Cette droite est horizontale (puisque tous ses points ont même Z). Nous conviendrons de l'appeler horizontale de coïncidence.

On peut dire aussi que, si l'horizontalité de l'arête du prisme était rigoureusement réalisée ($i = 0$) $Y' - Y$ serait nul pour tous les couples de points correspondants (relation 15) et ceux-ci seraient symétriques par rapport à l'horizontale de coïncidence (relation 19 bis) puisque le Z de tous les points de cette droite est égal à $2f\sigma$.

Il s'ensuit en particulier que la bissectrice de l'angle des deux traînées sur la plaque serait horizontale.

Il en est de même si l'arête du prisme n'est pas rigoureusement horizontale, car la différence des Z : ($Z' - Z$) est la même, aux termes du second ordre près, que si l'arête était horizontale. Mais la différence des Y cesse d'être nulle. Elle reste pourtant constante pour tous les couples de points correspondants. On voit que l'on passe du premier cas au second en déplaçant l'une des trajectoires par rapport à l'autre parallèlement à elle-même, d'un mouvement de translation suivant une horizontale.

REMARQUE. — Dans le cas général, les coefficients angulaires des deux trajectoires, qui sont rectilignes si l'on néglige les termes du second ordre, sont égaux et de signes contraires. En effet, les deux droites

$$\begin{aligned} Y &= -f\omega \cos 2V & Z &= -f\varepsilon \\ Y' &= +f\omega \cos 2V & Z' &= +f\varepsilon \end{aligned}$$

sont parallèles à ces trajectoires, qui ont pour équations les équations 19 bis puisque les quantités $f i \sin 2V$ et $2f\sigma$ sont constantes pour un même cliché. Or, aux termes du second ordre près, ω et ε varient proportionnellement au temps.

$$\omega = l_1 T \quad \varepsilon = g_1 T.$$

Les relations précédentes peuvent donc s'écrire

$$\begin{cases} Y = -fl_1 T \cos 2V & Z = -fg_1 T \\ Y' = +fl_1 T \cos 2V & Z' = +fg_1 T. \end{cases}$$

Les coefficients angulaires de ces deux droites sont donc égaux et de signes contraires.

Ainsi est encore démontré que la bissectrice de l'angle des deux traînées est horizontale.

Ces considérations conduisent aux méthodes de résolution suivantes, permettant de déduire, en première approximation, l'heure de la coïncidence du seul examen du cliché.

PREMIÈRE MÉTHODE

On met la plaque sur une machine de mesure, et on l'oriente de telle sorte que le fil mobile du micromètre de la machine soit parallèle à une horizontale du cliché, c'est-à-dire, ainsi que nous venons de le voir, à la bissectrice de l'angle des deux traînées.

Pour cela, on oriente successivement la plaque dans deux positions telles que, dans un cas le fil mobile puisse être amené à coïncider avec l'une des traînées, dans l'autre cas, à coïncider avec l'autre. On fait chaque fois la lecture de l'angle de position du plateau de la machine. On place ensuite ce plateau suivant la direction qui correspond à la moyenne des deux lectures. Le fil mobile du micromètre est alors perpendiculaire à l'axe des Z et parallèle à l'axe de Y du cliché, définis comme il a été dit au début de cet exposé.

On pointe avec le fil mobile successivement chaque point des deux traînées et l'on fait pour chacun la lecture de la vis du micromètre. Cette lecture ne diffère de la coordonnée Z théorique de ces points sur le cliché, que par une constante. La moyenne des deux lectures faites sur chaque couple de points correspondants est égale, à cette constante près, au Z de l'horizontale de coïncidence. Naturellement, la différence des lectures relatives à deux points quelconques du cliché est égale à la différence des Z de ces points, la constante dont nous avons parlé s'éliminant.

Soient donc

$$\Delta_1 Z, \Delta_2 Z, \Delta_3 Z, \dots \Delta_i Z$$

les différences des Z pour les divers couples de points correspondants. Soient $T_1 T_2 \dots T_c$ les heures observées qui se rapportent à ces points.

On a, d'après les relations 19 bis'

$$\Delta_i Z = 2 f \varepsilon_i.$$

En première approximation, ε varie proportionnellement au temps. Si donc on désigne par T_i l'heure de la coïncidence (pour laquelle $\varepsilon = 0$) et par T_i celle relative au couple de points correspondants de rang i , on a

$$(21) \quad \Delta_i Z = A f (T_i - T_c).$$

$\Delta_i Z$ est un résultat de mesures. T_i est connu. On aura donc n équations de la forme (21) entre les deux inconnues $A f$ et T_c . On les résoudra par la méthode de Cauchy.

DEUXIÈME MÉTHODE

Il pourra arriver que l'une des deux traînées (généralement la traînée réfléchie) soit trop peu nette pour se prêter à de bonnes mesures et que, seuls, quelques points aient impressionné la plaque convenablement. Si l'on veut, quand même, tirer parti de cette dernière, on pourra procéder de la façon suivante :

Soit Z_c le Z de la coïncidence, déterminé, comme il vient d'être dit, en prenant la moyenne des Z des points correspondants que l'on peut pointer dans de bonnes conditions.

Soient $Z_1, Z_2, Z_3, \dots Z_i$ les Z des points mesurés sur la traînée directe. On a, d'après la relation 19 bis,

$$Z_i = -2 f \sigma + f z_i = MT_i + N,$$

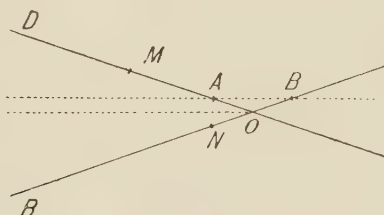


Fig. 16.

puisque ε varie proportionnellement au temps.

A l'instant de la coïncidence :

$$Z_c = MT_c + N.$$

Il s'ensuit que

$$(22) \quad Z_i - Z_c = M (T_i - T_c),$$

équation analogue à l'équation (21).

On aura n équations de ce genre entre les inconnues M et T_c . On les résoudra encore par la méthode de Cauchy.

TROISIÈME MÉTHODE

Soient D la traînée directe, R la traînée réfléchie, O leur point d'intersection. L'horizontale de coïncidence les coupe en A et B . Elle est parallèle à la bissectrice de l'angle O (figure 16). Le triangle $A O B$ est isocèle.

On a donc

$$OA = OB.$$

Soient M et N deux points correspondants. On a

$$AM = BN$$

et la figure 16. montre que

$$(23) \quad AM = BN = \frac{OM + ON}{2}.$$

Pour chaque couple de points correspondants, on mesurera donc sur la plaque les distances telles que OM et ON. On en déduira les valeurs de AM et de BN. Ces dernières varient, en première approximation, proportionnellement au temps. Soient T_i l'heure relative aux points M et N, T_c l'heure de la coïncidence.

On a

$$(24) \quad AM = a (T_i - T_c).$$

On a n équations de cette forme entre les deux inconnues a et T_c . On les résoudra par la méthode de Cauchy.

Ce procédé suppose que le point O soit susceptible de mesures précises. Il apparaît immédiatement une critique importante : c'est que toutes les mesures relatives aux différents points de la trajectoire seront rapportées au même point O. Une erreur commise sur la mesure de la position de ce point entachera toutes les mesures systématiquement. Aussi devra-t-on déterminer la position du point O non par une mesure directe sur le point d'intersection des deux trajectoires, mais par la considération de l'ensemble des points de ces deux trajectoires.

Nous n'insisterons pas davantage sur cette méthode, qui ne pourrait présenter un intérêt que dans des cas particuliers : ceux où les deux trajectoires seraient très inclinées l'une sur l'autre, et où par suite la variation des Z serait faible, alors que la distance linéaire des points consécutifs pourrait être grande. Ce cas est peu intéressant pour la détermination de l'heure dont nous nous occupons spécialement ici.

CINQUIÈME PROBLÈME

Les heures T_i étant déterminées pour chaque étoile observée pendant une soirée, calculer la correction de pendule.

1^o Supposons les conditions atmosphériques invariables.

Les heures T_i sont celles du passage des différentes étoiles au même cercle de hauteur. La hauteur commune des étoiles observées est alors $2V - R$ (équation 3). Soit h_a une valeur approchée de cette hauteur commune, et $h_a + dh$ la hauteur vraie à laquelle se trouvait l'étoile à l'instant de la coïncidence :

$$2V - R = h_a + dh.$$

Soient ϕ_a et Cp_a des valeurs approchées de la latitude du lieu et de la correction de la pendule à une heure origine T_0 marquée par elle et $\phi_a + d\phi$, $Cp_a + dCp$ leurs valeurs vraies. Soit m la marche de la pendule. On peut presque toujours dans les observations regarder m comme une quantité connue. C'est ce que nous ferons ici. Les déterminations de Cp pour les jours successifs en donneraient d'ailleurs une valeur probablement bien meilleure que celle que l'on pourrait déduire des observations faites pendant une même soirée.

Calculons quelle devrait être la hauteur de l'étoile à l'instant T_i de la coïncidence des images, si on adoptait, provisoirement, pour la latitude et la correction de pendule, les valeurs ϕ_a et Cp_a puis comparons ce résultat au résultat véritable.

Appelons $d'h$ la différence entre h_a et la hauteur ainsi calculée. La différence entre la hauteur vraie de l'étoile et la hauteur calculée est $dh + d'h$. On a l'équation différentielle

$$(25) \quad dh + d'h + \cos A d\phi + \sin A \cos \phi_a [dCp + m(T_i - T_0)] = 0$$

où A désigne l'azimut de l'étoile. A n'a pas besoin d'être connu avec une grande précision. On le calcule pour des valeurs approchées de la latitude et de la hauteur d'observation.

On a autant d'équation (25) que l'on a observé d'étoiles. Les inconnues sont dh , $d\phi$ et dCp .

C'est le problème de Gauss généralisé. Nous avons dit que MM. Claude et Driencourt en ont indiqué une solution graphique très élégante.

On peut aussi résoudre ces équations 25 par une des méthodes géné-

rales connues d'approximation. Celle de Cauchy nous paraît être la plus rapide. On aura ensuite la correction de pendule par la relation

$$Cp = Cp_a + dCp.$$

2^o Si les conditions atmosphériques varient, les valeurs de $d' h$ devront être modifiées de quantités $d R$, données, en fonction de la température et de la pression par les tables de Réfraction (Connaissance des Temps, table I).

REMARQUE. — Le problème se simplifie beaucoup si l'on peut regarder la latitude comme très bien connue, ce qui est le cas dans beaucoup d'observatoires. On n'a plus alors dans les équations 25 que deux inconnues $d h$ et $d Cp$ et comme, dans toutes ces équations, le coefficient de $d h$ est le même, l'application de la méthode de Cauchy en est très facilitée.

SIXIÈME PROBLÈME

2^o approximation. — Introduction des termes du second ordre.

Les quantités du second ordre que l'on aura à introduire peuvent provenir, soit des constantes i et σ qui ne peuvent dépasser cinq minutes d'arc, soit des quantités ε et ω qui sont fonction du temps et dont les variations, depuis la coïncidence ne peuvent atteindre 15 minutes d'arc. On pourra peut-être par des réglages convenables s'arranger pour rendre les carrés de i et de σ négligeables. Il n'en sera ainsi en aucun cas pour ε et ω .

Le carré de 5' est $0''5 = 0^s03$

Le produit de 5' par 15' est $1''3 = 0^s09$

Le carré de 15' est $4''0 = 0^s27$

Le cube de 15' est $0''02 = 0^s001$

Il est donc toujours légitime de ne conserver que les termes du second ordre.

On voit même que, dans une première détermination des constantes, on pourra s'en tenir aux termes du premier ordre.

Sans nous y arrêter pour le moment, poursuivons l'introduction des constantes et du temps.

Soit T le temps compté depuis une origine arbitraire, choisie vers le milieu de l'observation.

Posons

$$(26) \quad \begin{cases} \varepsilon = g + g_1 T + g_2 T^2 \\ \omega = l + l_1 T + l_2 T^2, \end{cases}$$

ε et ω étant exprimés en radians.

g et l sont les valeurs que prennent ε et ω pour $T = 0$:

$$g = \varepsilon_0 \quad l = \omega_0.$$

On a, à cause des équations (3) et (2).

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{lll} g = \varepsilon_0 = h_0 - 2V + R - \rho_0 & g_1 = \left(\frac{d\varepsilon}{dT} \right)_0 & g_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\varepsilon}{dT^2} \right)_0 \\ l = \omega_0 = \Psi - A_0 & l_1 = \left(\frac{d\omega}{dT} \right)_0 & g_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\omega}{dT^2} \right)_0 \end{array} \right.$$

Dans ces expressions l'indice zéro désigne les quantités qui se rapportent à l'origine du temps. — Or R est une constante. Donc, à cause de l'équation (3) :

$$g_1 = \left(\frac{dh}{dT} \right)_0 - \left(\frac{d\rho}{dT} \right)_0 \quad g_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2h}{dT^2} \right)_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\rho}{dT^2} \right)_0,$$

ρ est la variation de la réfraction pendant l'intervalle de temps qui sépare la coïncidence de l'instant correspondant au point considéré de la trajectoire. Si τ est cet intervalle de temps, on a

$$\rho = \tau \frac{d\rho}{dT};$$

ρ est une quantité très petite (inférieure à une seconde d'arc). Aussi avons-nous le droit de regarder $\frac{d^2\rho}{dT^2}$ comme nul. On a donc

$$(28) \quad g_1 = \left(\frac{dh}{dT} \right)_0 - \left(\frac{d\rho}{dT} \right)_0$$

$$(29) \quad g_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2h}{dT^2} \right)_0.$$

De même, à cause de l'équation (2)

$$l_1 = - \left(\frac{dA}{dT} \right)_0$$

$$l_2 = - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2A}{dT^2} \right)_0.$$

Soit H l'angle horaire de l'étoile au temps T . — La considération du triangle Pôle-Zénith, — position vraie de l'étoile, nous conduit aux équations

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin h = \sin \Phi \sin \delta + \cos \Phi \cos \delta \cos H \\ \cos h \sin A = \cos \delta \sin H \\ \cos h \cos A = \sin \delta \cos \Phi - \cos \delta \sin \Phi \cos H. \end{array} \right.$$

Différentiant les deux membres de la première équation 30, il vient

$$(31) \quad \cos h \frac{dh}{dT} = -\cos \Phi \cos \delta \sin H \frac{dH}{dT}.$$

dH est exprimé en radians et dT en temps. On a

$$(32) \quad \frac{dH}{dT} = 15 \sin 1''.$$

Nous poserons, pour simplifier les formules, $15 \sin 1'' = n_1$.
Alors

$$(33) \quad \frac{dh}{dT} = -n_1 \frac{\cos \Phi \cos \delta \sin H}{\cos h},$$

$$(34) \quad \frac{d^2 h}{dT^2} = -n_1^2 \frac{\cos \Phi \cos \delta \cos H}{\cos h} + \frac{n_1^2 \cos^2 \Phi \cos^2 \delta \sin^2 H \sin h}{\cos^3 h}.$$

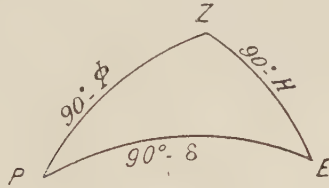


Fig. 17.

La formule 33 peut s'écrire aussi

$$\frac{dh}{dT} = -n_1 \cos \delta \sin E.$$

Si l'on divise membre à membre les deux dernières équations 30, il vient

$$(35) \quad \operatorname{tg} A = \frac{\cos \delta \sin H}{\sin \delta \cos \Phi - \cos \delta \sin \Phi \cos H}.$$

Différentiant les deux membres de cette équation, il vient encore

$$\frac{dA}{dT} = n_1 \cos^2 A \frac{(\sin \delta \cos \Phi - \cos \delta \sin \Phi \cos H) \cos \delta \sin H - \cos^2 \delta \sin^2 H \sin \Phi}{(\sin \delta \cos \Phi - \cos \delta \sin \Phi \cos H)^2}.$$

Tirant $\cos^2 A$ de la troisième équation 30 et substituant, on a

$$(36) \quad \frac{dA}{dT} = n_1 \cos \frac{-\cos \delta \sin \Phi + \sin \delta \cos \Phi \cos H}{\cos^2 h}.$$

On trouve aisément aussi que

$$\frac{d^2 A}{dT^2} = -n_1^2 \frac{\cos \delta \cos \Phi \sin H}{\cos^4 h} [\sin \delta \cos^2 h - 2 \cos^2 \delta \sin \Phi \sin h + 2 \sin \delta \cos \delta \cos \Phi \cos H \sin h]$$

et à cause de la première équation (30)

$$(37) \quad \frac{d^2 A}{dT^2} = -n_1^2 \frac{\cos \delta \cos \Phi \sin H}{\cos^4 h} [\sin \delta + \sin \delta \sin^2 h - 2 \sin \Phi \sin h].$$

Finalement on a pour g, g_1, g_2, l, l_1, l_2 les valeurs suivantes :

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} g = h_0 - 2V + R - \rho_0 \\ g_1 = -\frac{n_1 \cos \Phi \cos \delta \sin H_0}{\cos H_0} - \left(\frac{d\rho}{dT} \right)_0 \\ g^2 = -\frac{n_1^2 \cos \Phi \cos \delta \cos H_0}{2 \cos h_0} + \frac{n_1^2 \cos^2 \Phi \cos^2 \delta \sin^2 H_0 \sin h_0}{2 \cos^3 h_0} \\ l = \omega_0 \\ l_1 = n_1 \frac{\cos \delta [\cos \delta \sin \Phi - \sin \delta \cos \Phi \cos H_0]}{\cos^2 h_0} \\ l_2 = \frac{1}{2} n_1 \frac{\cos \delta \cos \Phi \sin H_0}{\cos^4 h_0} [\sin \delta + \sin \delta \sin^2 h_0 - 2 \sin \Phi \sin h_0]. \end{array} \right.$$

Enfin on peut écrire

$$\frac{d\rho}{dT} = \frac{d\rho}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dT}.$$

Si l'angle du prisme, et par suite la hauteur apparente de l'étoile au moment de l'observation sont voisins de 60° , la variation de ρ correspondante à une variation de 10 minutes de ε est $0''23$.

$R - \rho$ diminue quand ε augmente. Donc ρ augmente. Donc $\frac{d\rho}{d\varepsilon}$ est positif, et l'on a

$$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = + \frac{0''23}{600} = + 0,000383.$$

Enfin, nous avons dit que

$$\frac{d\varepsilon}{dT} = \frac{dh}{dT} = -n_1 \frac{\cos \Phi \cos \delta \sin H}{\cos h}.$$

Par suite

$$\left(\frac{d\rho}{dT} \right)_0 = -n_1 \frac{\cos \Phi \cos \delta \sin H_0}{\cos h_0} \times 0,000383$$

et

$$(39) \quad g_1 = -n_1 \frac{\cos \Phi \cos \delta \sin H_0}{\cos h_0} (1 - 0,000383).$$

Pour un angle du prisme voisin de 45°, on a

$$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = \frac{0''35}{600} = 0.000583$$

$$(40) \quad g_1 = -n_1 \frac{\cos \Phi \cos \delta \sin H_0}{\cos h_0} (1 - 0.000583).$$

Rassemblons les formules

$$(41) \quad \begin{cases} \varepsilon = h_0 - 2V + R - \rho_0 + g_1 T + g_2 T^2 \\ \omega = \omega_0 + l_1 T + l_2 T^2 \end{cases}$$

$$(42) \quad \begin{cases} \frac{Y' - Y}{f} = -4i \cos V [\sin V + \varepsilon \cos V] \\ \frac{Z' - Z}{f} = -2\varepsilon - \frac{\omega^2 - i^2}{2} \sin 4V + 2i^2 \sin 2V. \end{cases}$$

A ces formules, il faut joindre, négligeant les termes d'ordre supérieur au second

$$(43) \quad \begin{cases} \frac{Z}{f} = \varepsilon - 2\sigma + \frac{\omega^2 - i^2}{4} \sin 4V + 2\omega i \cos^2 V \cos 2V - i^2 \sin 2V \\ \frac{Z'}{f} = -\varepsilon - 2\sigma - \frac{\omega^2 - i^2}{4} \sin 4V + 2\omega i \cos^2 V \cos 2V + i^2 \sin 2V. \end{cases}$$

$$(44) \quad \begin{cases} \frac{Y}{f} = i \sin 2V - \omega \cos 2V - i(2\sigma - \varepsilon) + i\varepsilon \cos 2V + \omega \varepsilon \sin 2V \\ \frac{Y'}{f} = -i \sin 2V - \omega \cos 2V - i(2\sigma + \varepsilon) - i\varepsilon \cos 2V + \omega \varepsilon \sin 2V. \end{cases}$$

Dans ces formules, les quantités ε , ω , i et σ sont exprimées en radians.

SEPTIÈME PROBLÈME

Détermination de l'heure de la coïncidence.

Dans une première approximation, nous supposons que les axes de coordonnées de la machine de mesure sont exactement parallèles aux axes de coordonnées théoriques sur la plaque. Nous désignerons par z et z' les lectures faites sur la machine suivant l'axe des Z . Nous conserverons les notations Z , Z' pour les coordonnées théoriques correspondantes.

Choisissons pour origine du temps, pour chaque cliché l'instant où la hauteur vraie de l'étoile est

$$h = 2V - R$$

(formule 3 où l'on fait $\varepsilon = 0$).

Soit T_0 l'heure indiquée par la pendule en cet instant.

Pour plus de généralité, envisageons un point quelconque p de la trajectoire directe et un point quelconque q de la trajectoire réfléchie.

D'après les relations 43 on a

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{Z_p}{f} &= g_1(T_p - T_0) + g_2(T_p - T_0)^2 - 2\sigma + \frac{\omega_p^2 - i^2}{4} \sin 4V + 2i\omega_p \cos^2 V \cos 2V \\ &\quad - i^2 \sin 2V \\ \frac{Z'_q}{f} &= -g_1(T_p - T_0)g_2(T_q - T_0)^2 - 2\sigma - \frac{\omega_q^2 - i^2}{4} \sin 4V + 2i\omega_q \cos^2 V \cos 2V \\ &\quad + i^2 \sin 2V. \end{aligned} \right.$$

Retranchons membre à membre :

$$(46) \quad \frac{z_p - z'_q}{f} = g_1[T_p + T_q - 2T_0] + g_2[(T_p - T_0)^2 + (T_q - T_0)^2] + \frac{\omega_p^2 + \omega_q^2}{4} \sin 4V \\ - \frac{i^2}{2} [\sin 4V + 4 \sin 2V] + 2i(\omega_q - \omega_p) \cos^2 V \cos 2V.$$

Les quantités ω_p , ω_q et i , y sont au second ordre. Nous pouvons donc les remplacer par leur valeur tirée des équations 19 bis, dans lesquelles on n'a conservé que les termes du premier ordre.

Écrivons ces équations :

$$(19 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{Y}{f} &= i \sin 2V - \omega \cos 2V \\ \frac{Y'}{f} &= -i \sin 2V - \omega \cos 2V. \end{aligned} \right.$$

Elles donnent, par addition et soustraction,

$$(47) \quad \omega = -\frac{Y + Y'}{2f \cos 2V} \quad i = \frac{Y - Y'}{2f \sin 2V}$$

Soit I_0 l'Y d'un point repère marqué sur le cliché. Ce repère sera le trait d'un réseau que l'on aura eu soin d'impressionner sur la plaque avant l'observation.

Soient y et y' la différence des Y du repère et des points considérés sur les deux trajectoires. On a

$$Y = I_0 + y \quad Y' = I_0 + y'.$$

Les quantités telles que Y sont rapportées aux axes théoriques du cliché, dont nous ne connaissons pas exactement la position. Au contraire, les quantités y et y' sont le résultat de mesures différentielles faites sur la machine. Ce sont des quantités connues. I_0 peut être regardé

comme inconnu, à moins que l'on ait un procédé physique de le déterminer.

Nous avons donc remplacé, dans le cas le plus défavorable, les quantités inconnues $Y_p, Y_q, \dots$ par autant de quantités connues $y_p, y_q, \dots$ et une seule inconnue I_0 . Encore pouvons-nous espérer parvenir à déterminer ou à éliminer cette dernière.

Remplaçons dans les formules 47, Y et Y' par leurs valeurs

$$(48) \quad Y = I_0 + y \quad Y' = I_0 + y'.$$

Il vient

$$\omega = - \frac{2 I_0 + y + y'}{2 f \cos 2 V} \quad i = \frac{y - y'}{2 f \sin 2 V}.$$

Portant ces valeurs dans la relation 46 celle-ci devient

$$\begin{aligned} \frac{z_p - z'_q}{f} = & g_1 [T_p + T_q - 2 T_0] + g_2 [(T_p - T_0)^2 + (T_q - T_0)^2] \\ & + \frac{I_0^2}{f^2} \operatorname{tg} 2 V + \frac{I_0}{f} \operatorname{tg} 2 V \frac{y_p + y'_p + y_q + y'_q}{2 f} \\ & + \frac{\operatorname{tg} 2 V}{2} \frac{\left(\frac{y_p + y'_p}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_q + y'_q}{2}\right)^2}{f^2} - \frac{2 + \cos 2 V}{4 \sin 2 V} \frac{(y_p - y'_p)^2}{f^2} \\ & + \frac{\cos^2 V}{2 \sin 2 V} \frac{y_p - y'_p}{f} \frac{y_q + y'_q - y_p - y'_p}{f} \end{aligned}$$

d'où l'on peut déduire

$$\begin{aligned} T_0 = & \frac{T_p + T_q}{2} - \frac{z_p - z'_q}{2 f g_1} + \frac{g_2}{2 g_1} [(T_p - T_0)^2 + (T_q - T_0)^2] + \frac{\operatorname{tg} 2 V}{2 g_1} \frac{I_0^2}{f^2} \\ & + \frac{\operatorname{tg} 2 V}{2 g_1} \frac{I_0}{f} \frac{y_p + y'_p + y_q + y'_q}{2 f} \\ (49) \quad & + \frac{\operatorname{tg} 2 V}{2 g_1} \frac{\left(\frac{y_p + y'_p}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_q + y'_q}{2}\right)^2}{2 f^2} - \frac{2 + \cos 2 V}{8 g_1 \sin 2 V} \frac{(y_p - y'_p)^2}{f^2} \\ & + \frac{\cos^2 V}{4 g_1 \sin 2 V} \frac{y_p - y'_p}{f} \frac{y_q + y'_q - y_p - y'_p}{f}. \end{aligned}$$

Donc, les mesures relatives à un point quelconque de la traînée directe combinées avec celles relatives à un point quelconque de la traînée réfléchie permettent de déduire l'heure de la coïncidence, si l'on sait déterminer les constantes $\frac{I_0}{f}$, f , g_1 et g_2 .

La relation 49 se simplifierait d'ailleurs si l'on considérait non deux points quelconques pris sur les deux traînées, mais deux points correspondants. Elle deviendrait

$$T_0 = T - \frac{z - z'}{2 f g_1} + \frac{g_2}{g_1} (T - T_0)^2 + \frac{\operatorname{tg} 2 V}{2 g_1} \frac{I_0^2}{f^2} + \frac{\operatorname{tg} 2 V}{2 g_1} \frac{I_0}{f} \frac{y + y'}{f}$$

$$(50) \quad + \frac{\operatorname{tg} 2 V}{2 g_1} \frac{\left(\frac{y+y'}{2}\right)^2}{f^2} - \frac{2 + \cos 2 V}{8 g_1 \sin 2 V} \frac{(y-y')^2}{f^2}.$$

Malgré la plus grande simplicité de la formule 50, il convient de conserver la formule plus générale 49. Il arrivera souvent, en effet, qu'on aura sur l'une des deux traînées des points très nets, alors que, sur l'autre, certains points correspondants seront d'une mesure difficile, et devront être rejetés. On désirera pourtant conserver les premiers ce que ne permettrait pas l'emploi de la relation 50.

Dans la formule 49 nous n'avons introduit que les résultats des mesures faites sur deux points des deux traînées. Il est nécessaire de faire concourir tous les points des deux traînées à la détermination de T_0 .

Or, la formule 49 est le résultat de la combinaison des deux relations 45. La première relation 45 caractérise un point de la traînée directe, la seconde un point de la traînée réfléchie. On a donc pour chaque point de chaque traînée une telle relation. Si l'on considère les n relations données par les n points de la traînée directe, on peut les grouper en une seule, dont les coefficients sont les moyennes des coefficients des n relations considérées. Il en est de même des n' points de la traînée réfléchie.

En définitive, on devra remplacer la relation 49 par une relation analogue où les quantités affectées de l'indice p devront être remplacées par la moyenne des n quantités correspondantes et celles affectées de l'indice q par la moyenne des n' quantités correspondantes. Il vient alors

$$(51) \quad T_0 = \frac{\frac{\sum}{n} T_p + \frac{\sum}{n'} T_q}{2} - \frac{\frac{\sum}{n} z_p - \frac{\sum}{n'} z'_q}{2 f g_1} + \frac{g_2}{2 g_1} \left[\frac{\sum}{n} (T_p - T_0)^2 + \frac{\sum}{n'} (T_q - T_0)^2 \right] \\ + \frac{\operatorname{tg}^2 V}{2 g_1} \frac{I_0^2}{f^2} \\ + \frac{\operatorname{tg} 2 V}{2 g_1} \frac{I_0}{f} \frac{\frac{\sum}{n} (y_p + y'_p) + \frac{\sum}{n'} (y_q + y'_q)}{2 f} \\ + \frac{\operatorname{tg} 2 V}{2 g_1} \frac{\frac{\sum}{n} \left(\frac{y_p + y'_p}{2}\right)^2 + \frac{\sum}{n'} \left(\frac{y_q + y'_q}{2}\right)^2}{2 f^2} \\ - \frac{2 + \cos 2 V}{8 g_1 \sin 2 V} \frac{(y_p - y'_p)^2}{f^2} \\ + \frac{\cos 2 V}{4 g_1 \sin 2 V} \frac{y_p - y'_p}{f} \frac{\frac{\sum}{n} (y_q + y'_q) - \frac{\sum}{n'} (y_p + y'_p)}{f}$$

C'est l'équation du problème. — Elle contient deux termes du premier ordre

$$\frac{\sum T_p}{2} + \frac{\sum T_q}{2} - \frac{\sum z_p}{2fg_1} - \frac{\sum z_q}{2fg_1}$$

Les termes en y sont tous du second ordre.

HUITIÈME PROBLÈME

Détermination des constantes.

Dans la relation 51 :

T_0 est l'inconnue.

Les termes en T , en z et en y sont des résultats de mesure (nous rappelons que la quantité y est la différence des lectures faites sur la machine, suivant l'axe des y , quand on amène successivement le fil mobile du réticule sur le point considéré d'une des traînées, et sur un trait repère marqué sur la plaque : trait d'un réseau préalablement impressionné sur elle).

V , $\frac{I_0}{f}$, f , g_1 et g_2 sont des constantes à déterminer.

Les constantes peuvent être elles-mêmes divisées en deux groupes :

a) Les constantes particulières de chaque cliché : g_1 , g_2 ,

b) Les constantes valables pour tous les clichés d'une même soirée :

1° *Constantes propres à chaque cliché.* — *Calcul de g_1 .* — On se servira de la deuxième relation 38 :

$$(52) \quad \text{où} \quad \begin{cases} g_1 = - \frac{n_1 \cos \Phi \cos \delta \sin H_0}{\cos h_0} + \left(\frac{d\rho}{dT} \right)_0 \\ \left(\frac{d\rho}{dT} \right)_0 = - \frac{n_1 \cos \Phi \cos \delta \sin H_0}{\cos h_0} \left(\frac{d\rho}{d\varepsilon} \right)_0 \\ n_1 = 15 \sin 1^\circ \end{cases}$$

Le calcul de g_1 exige donc le calcul préalable de H_0 $h_0 \frac{d\rho}{d\varepsilon}$.

Mais on a

$$(53) \quad \begin{cases} H_0 = \alpha - T_0 - Cp \\ \sin h_0 = \sin \Phi \sin \delta + \cos \Phi \cos \delta \cos H_0. \end{cases}$$

Le calcul de H_0 et de h_0 est donc ramené à celui de T_0 et de Cp .

Remarquons en passant que des cinq quantités T_0 Cp h_0 $\frac{d\rho}{d\varepsilon}$, trois sont constantes pour toute la soirée : Cp h_0 $\frac{d\rho}{d\varepsilon}$ ou peuvent être regardées comme telles pour le but que nous nous proposons. Les deux autres H_0 et T_0 sont, dans le calcul de g_1 multipliées par le coefficient n_1 qui est petit du premier ordre. Il nous suffit donc de les connaître aux termes du second ordre près.

Calcul de T_0 . — On adoptera pour l'heure T_0 de la coïncidence sa valeur approchée T_c calculée comme il a été dit pour le quatrième problème.

Calcul de Cp . — On pourra obtenir une valeur suffisamment approchée de la correction de pendule, en opérant comme il est dit au cinquième problème et en employant les valeurs approchées T_c des heures de coïncidence conclues pour deux étoiles est et ouest. Ce calcul sera facilité si l'on a pu, dans le cours de la soirée, observer une même étoile à ses deux passages est et ouest au cercle de hauteur. Dans ce cas, l'heure de son passage au méridien est égale à la moyenne des deux heures observées, et la correction de pendule est la différence entre l'ascension droite de l'étoile et l'heure ainsi conclue.

Calcul de H_0 . — On remplacera dans la première formule 51, T_0 et Cp par les deux valeurs précédentes.

Calcul de h_0 . — On remplacera dans la formule

$$\sin h_0 = \sin \Phi \sin \delta + \cos \Phi \cos \delta \cos H_0$$

H_0 par la valeur ainsi trouvée.

Calcul de $\frac{d\rho}{d\varepsilon}$. — C'est le rapport de la variation de la réfraction, relative à un accroissement donné de la hauteur d'une étoile, à cet accroissement. On trouve dans la Connaissance des Temps les données nécessaires au calcul de cette quantité.

On déduira enfin g_1 .

Calcul de g_2 . — On emploiera la troisième formule 38

$$(54) \quad g_2 = -\frac{n_1^2}{2} \frac{\cos \Phi \cos \delta \cos H_0}{\cos h_0} + \frac{n_1^2}{2} \frac{\cos^2 \Phi \cos^2 \delta \sin^2 H_0 \sin h_0}{\cos^3 h_0}$$

où l'on remplacera h_0 et H_0 par leurs valeurs approchées calculées comme il vient d'être dit.

2° Constantes valables pour tous les clichés d'une même soirée. — Calcul de V . — On se servira de la formule (3)

$$2 V = h_0 + R.$$

Dans la formule (51) la quantité V ne figure que dans les termes du second ordre. On commettra donc une erreur négligeable en remplaçant dans la formule précédente h_0 par sa valeur approchée que nous avons calculée quelques lignes plus haut.

Calcul de f . — Soit d la distance de deux points quelconques de l'une des traînées (la traînée directe par exemple). Soit ΔT l'intervalle de temps qui les sépare; soit δ la déclinaison de l'étoile observée. On a

$$\frac{d}{f} = \sin \Delta T \cos \delta$$

d'où l'on pourra tirer f .

On mesurera d sur la machine en orientant la plaque de telle sorte que le fil mobile soit perpendiculaire à la traînée directe, si c'est à celle-ci que se rapportent les mesures.

Calcul de $\frac{I_0}{f}$. — Reprenons la première formule 45 relative à la traînée directe. Considérons deux points de cette traînée, assez éloignés l'un de l'autre. On a pour eux les deux relations :

$$\begin{aligned} \frac{z_p}{f} &= g_1 [T_p - T_0] + g_2 [T_p - T_0]^2 - 2 \sigma + \frac{\omega_p^2 - i^2}{4} \sin 4 V \\ &\quad + 2 i \omega_p \cos^2 V \cos 2 V - i^2 \sin 2 V \\ \frac{z_s}{f} &= g_1 [T_s - T_0] + g_2 [T_s - T_0]^2 - 2 \sigma + \frac{\omega_s^2 - i^2}{4} \sin 4 V \\ &\quad + 2 i \omega_s \cos^2 V \cos 2 V - i^2 \sin 2 V. \end{aligned}$$

Retranchons-les membre à membre :

$$(55) \quad \frac{z_p - z_s}{f} = g_1 [T_p - T_s] + g_2 [(T_p - T_0)^2 - (T_s - T_0)^2] + (\omega_p^2 - \omega_s^2) \frac{\sin 4 V}{4} \\ + 2 i (\omega_p - \omega_s) \cos^2 V \cos 2 V$$

où l'on a

$$\omega_p = \frac{-\frac{I_0 + y_p}{f} + i \sin 2 V}{\cos 2 V} \quad \omega_s = \frac{-\frac{I_0 + y_s}{f} + i \sin 2 V}{\cos 2 V}.$$

Donc

$$\omega_p - \omega_s = \frac{y_p - y_s}{f \cos 2V} \quad \omega_p + \omega_s = \frac{-\frac{2I_0}{f} - \frac{y_p + y_s}{f} + 2i \sin 2V}{\cos 2V}$$

$$\omega^2 - \omega_s^2 = -\frac{2I_0}{f} \frac{y_p - y_s}{f \cos^2 2V} - \frac{y_p^2 - y_s^2}{f^2 \cos^2 2V} + \frac{2i \sin 2V [y_p - y_s]}{f \cos^2 2V}.$$

Finalement

$$(55 \text{ bis}) \quad \frac{z_p - z_s}{f} = g_1 [T_p - T_s] + g_2 [(T_p - T_0)^2 - (T_s - T_0)^2]$$

$$- \frac{I_0}{f} \frac{y_p - y_s}{f} \operatorname{tg} 2V - \frac{y_p^2 - y_s^2}{f^2} \frac{\operatorname{tg} 2V}{2}$$

$$+ \frac{y_p - y_s}{f} i [\sin 2V \operatorname{tg} 2V + 2 \cos^2 V].$$

avec

$$i = \frac{y_p - y'_p}{2f \sin 2V}.$$

Dans la relation 55 bis, $\frac{I_0}{f}$ seul est inconnu. On aura autant de relations semblables que d'étoiles observées. On prendra la moyenne des valeurs de $\frac{I_0}{f}$ données par chacune d'elles.

On pourrait aussi regarder dans la relation 55 bis, f et $\frac{I_0}{f}$ comme inconnus tous deux et les déduire de l'ensemble des équations fournies par toutes les étoiles observées. On n'a évidemment aucun intérêt à procéder ainsi.

Le calcul de $\frac{I_0}{f}$ est assez long. Il est d'ailleurs peu précis. Il vaut donc bien mieux chercher à l'annuler ou à l'éliminer, par des réglages convenables qu'à le déterminer.

Revenons donc à la formule 51 et examinons les termes dans lesquels entre cette quantité.

Le premier est

$$\frac{\operatorname{tg} 2V}{2g_1} \frac{I_0^2}{f^2}.$$

Posons

$$\frac{\operatorname{tg} 2V}{2} \frac{I_0^2}{f^2} = Q.$$

Cette quantité est constante pour tous les clichés de la soirée.

Si donc nous négligeons, dans la relation 51, le terme $\frac{Q}{g_1}$, tout se passe comme si la hauteur constante à laquelle toutes les étoiles se sont trouvées aux instants des coïncidences, était un peu plus faible qu'elle ne l'est en réalité. Mais la valeur de la correction de pendule déduite de toutes ces observations ne sera point changée.

En effet, aux termes du second ordre près (équation 26) :

$$g_1 = \frac{d\varepsilon}{dt}$$

g_1 est donc l'angle dont varie la hauteur de l'étoile dans l'unité de temps.

La quantité d'ailleurs très petite $\frac{Q}{g_1}$ est égale au temps pendant lequel la hauteur de l'étoile a augmenté de Q .

Ce raisonnement s'applique à toutes les étoiles observées quelle que soit leur déclinaison. Si donc on néglige le terme $\frac{Q}{g_1}$ tout se passe comme si le rayon du cercle de hauteur d'observation était très légèrement modifié. En d'autres termes T_0 est l'heure à laquelle la hauteur de l'étoile est $2V - R - Q$ au lieu de $2V - R$, ce qui ne modifie en rien la valeur du C_p conclu.

Reste le terme en $\frac{I_0}{f}$.

$$\frac{tg \ 2V}{2g_1} \frac{\sum (y_p + y'_p) + \frac{\sum}{n'} (y_q + y'_q)}{2f} \frac{I_0}{f}$$

Pour qu'il soit négligeable il faut ou bien que

$$(56) \quad \frac{tg \ 2V}{2} \frac{\sum (y_p + y'_p) + \frac{\sum}{n'} (y_q + y'_q)}{2f}$$

soit négligeable

ou bien que $\frac{I_0}{f}$ soit négligeable.

1° *Condition pour que l'expression 56 soit négligeable.* — Rappelons que, par définition, I_0 est l' Y théorique du repère et les quantités y_p, y_q, y_p, y_q sont les différences des lectures faites sur la machine suivant l'axe des y , relativement aux différents points des deux traînées et au repère.

Pour que la quantité représentée par l'expression 56 soit nulle, il suffit que

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\Sigma}{n} (y_p + y'_p) + \frac{\Sigma}{n'} (y_q + y'_q) \right] = 0$$

ou en d'autres termes que la demi-somme des moyennes des lectures faites sur la machine de mesure quand on amène le fil du réticule successivement sur les différents points des deux traînées, soit égale à la lecture faite quand on fait coïncider ce fil avec le trait repère du réseau ou avec tout autre point de la plaque choisi comme repère.

Dans ce cas nous aurons certainement le droit de négliger complètement dans la relation 51 les termes en $\frac{I_0}{f}$. Il suffira que la moyenne des y

moyens des points mesurés sur les deux traînées soit la même pour tous les clichés obtenus pendant la soirée. Si l'on a soin de prendre des points symétriques par rapport à la coïncidence, on peut dire qu'il faut que, pour toutes les étoiles de la soirée, la coïncidence ait lieu, suivant l'axe des y au même point du cliché.

Prenons par exemple le cas d'une étoile voisine du premier vertical, observée à Nice avec l'instrument de 2 m. de foyer. Pour une telle étoile $\frac{1}{2g_1}$ est voisin de 10^4 .

Admettons pour $\frac{I_0}{f}$ un nombre très fort : 10 minutes d'arc soit $\frac{3}{10^3}$.

Posons

$$y_m = \frac{1}{2} \left[\frac{\Sigma}{n} (y_p + y'_p) + \frac{\Sigma}{n'} (y_q + y'_q) \right]$$

Pour que l'erreur commise soit moindre que $\left(\frac{1}{100}\right)^s$ il faut que

$$y_m 10^4 \frac{3}{10^3} \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^3} < \frac{1}{10^2}$$

ou

$$y_m < \frac{2}{3} \text{ mm.}$$

On peut donc négliger les termes en $\frac{I_0}{f}$ en prenant les précautions qui viennent d'être dites. Même si, par suite d'un réglage un peu défectueux, l'erreur commise pour la détermination de l'heure de la coïncidence de chaque étoile n'était pas absolument négligeable, elle serait

extrêmement faible. Elle serait de signes contraires pour les étoiles observées à l'est et à l'ouest (pour une même étoile g_1 est de signe contraire à son passage est et à son passage ouest). La correction de pendule conclue n'en serait pas affectée d'une façon appréciable.

2^o Rendre $\frac{I_0}{f}$ négligeable. -- Pour rendre $\frac{I_0}{f}$ négligeable, on devra employer des procédés physiques :

1^{er} procédé. — Supposons que l'on fasse appuyer sur l'arête du prisme, rendue préalablement horizontale¹, un miroir plan à peu près vertical. On examine dans le micromètre le fil mobile du réticule et son image réfléchiée par le miroir. On fait tourner le prisme en azimut devant l'objectif, jusqu'à ce que le fil et son image soient aperçus en coïncidence. — La lecture du tambour de la vis définit alors le plan vertical passant par le centre optique de l'objectif et perpendiculaire à l'arête du prisme.

On laisse la vis dans cette position. On observe une étoile et l'on s'arrange pour que la coïncidence des images ait lieu rigoureusement sous le fil mobile. On escamote le petit miroir auxiliaire incliné à 45° qui renvoyait les faisceaux lumineux dans le micromètre, et on laisse l'étoile impressionner la plaque photographique.

Le point de la plaque où a lieu la coïncidence, ou, ce qui revient au même, celui (que l'on peut déterminer par extrapolation) où elle aurait eu lieu si l'on avait pu découvrir le châssis avant qu'elle ne se produise, se trouve dans un plan vertical perpendiculaire à l'arête du prisme, passant par le centre optique de l'objectif, le plan $z O x$. La trace de ce plan sur le cliché est donc connue et il est facile de déterminer sa distance aux traits du réseau qui a été photographié sur lui. C'est elle, et non plus un trait de ce réseau que nous adopterons comme repère. On a bien alors

$$\frac{I_0}{f} = 0.$$

On a là un procédé de réglage par autocollimation qui semble devoir assurer une précision analogue à celle que l'on obtient, avec l'astrolabe à prisme de MM. Claude et Driencourt quand on règle la position du prisme devant l'objectif par autocollimation sur la face arrière.

1. Pour rendre l'arête du prisme horizontale ($i = 0$) on agit sur les vis du plateau supérieur de l'instrument de façon que les deux images d'une étoile observée, soient aperçues, à chaque instant, sur une même verticale ($y' - y = 0$).

Malheureusement l'arête du prisme est émoussée et l'on ne peut affirmer que le plan d'émoussement lui est bien parallèle.

2^e *procédé*. — Supposons que l'on réalise matériellement un dièdre ayant rigoureusement le même angle que le prisme et supportant un petit miroir plan perpendiculaire à son plan bissecteur et parallèle à son arête. — On applique les faces du dièdre sur les faces du prisme de façon à les faire coïncider. On amène le fil mobile du micromètre sur son image vue par réflexion sur le petit miroir. Le problème est alors résolu.

L'une des faces du dièdre peut être schématisée par trois pointes reposant sur l'une des faces du prisme. Il suffit que l'autre le soit par deux pointes s'appuyant sur l'autre face et disposées parallèlement à l'arête. Par ces deux pointes, on peut, il est vrai, faire passer une infinité de plans, mais si l'on retourne tout ce dispositif sur le prisme de façon à faire appuyer les trois premières pointes successivement sur les deux faces, il n'y aura qu'une position du petit miroir telle qu'une croisée de fils du réticule et son image demeurent en coïncidence avant et après le retournement. S'il n'en est pas ainsi, on agira en conséquence sur les vis de réglage du petit miroir.

3^e *procédé*. — Lorsque l'angle du prisme est voisin de 60° ou de 45° , ce qui était le cas dans mes expériences, on peut employer une méthode très simple d'autocollimation. On suppose toujours l'arête du prisme rendue préalablement horizontale. On place au-dessous de la face inférieure un petit bain de mercure, et l'on amène le fil mobile vertical du micromètre en coïncidence avec son image, vue, lorsque l'angle du prisme est 60° , après trois réflexions sur le miroir et deux sur le bain ; lorsque cet angle est 45° , après quatre réflexions sur le miroir et trois sur le bain. On lit le tambour de la vis. Cette lecture définit le plan vertical passant par le centre optique de l'objectif et perpendiculaire à l'arête du prisme. On peut ainsi, comme par le premier procédé déterminer la trace du plan $z O x$ sur chaque cliché.

4^e *procédé*. — Le prisme étant provisoirement enlevé, on amène le fil mobile du micromètre sur l'image d'un objet d'azimut connu. On lit le cercle de calage de l'instrument. On a ainsi la correction de collimation de ce cercle, pour cette position du fil. On connaît par des déterminations antérieures, une valeur très approchée de l'angle du prisme. On peut donc calculer l'azimut d'une étoile au moment de la coïncidence des images et la lecture du cercle correspondant à cet azimut. L'axe optique de la lunette étant ainsi dirigé suivant cette lecture, on agit

sur les vis de réglage du prisme de façon que la coïncidence ait lieu sous le fil mobile du réticule. Celui-ci définit bien le plan vertical passant par le centre optique de l'objectif et perpendiculaire à l'arête du prisme.

On aura avantage à remplacer, pour ces opérations, le réticule par une plaque mise dans le châssis et sur laquelle aura été photographié un réseau. C'est un trait de ce réseau qui jouera le rôle du fil mobile précédent. Le châssis étant ouvert, on apercevra sur la plaque les deux images de l'étoile. On les examinera au moyen d'une loupe.

5^e *procédé*. — On peut utiliser comme mire un théodolite auxiliaire placé à proximité de l'instrument. Ce théodolite étant réglé et orienté, on le placera face à l'objectif de l'instrument des hauteurs égales, les axes des deux lunettes étant parallèles. On apercevra dans le champ du théodolite les images des traits du réseau placé dans le plan local de l'autre instrument. On fera coïncider le fil vertical du réticule du théodolite avec l'une d'elles. Le trait correspondant du réseau et le centre optique de l'objectif de l'instrument des hauteurs égales déterminent un plan vertical dont on peut lire l'azimut sur le cercle du théodolite.

De tous ces procédés, le dernier semble le meilleur parce qu'il est le plus simple et le plus facile à appliquer. Le troisième est avantageux aussi parce qu'il permet de vérifier souvent le réglage sans être astreint à démonter le prisme. Mais les instruments des hauteurs égales existants n'ont pas été prévus pour son application. On devrait donc les modifier légèrement si on voulait l'adopter.

La quantité $\frac{I_0}{f}$ étant ainsi annulée, l'équation 51 se simplifie en conséquence.

NEUVIÈME PROBLÈME

Erreur due à ce que les axes de coordonnées de la machine de mesure ne peuvent pas être rendus rigoureusement parallèles aux axes de coordonnées théoriques.

Supposons que les axes de coordonnées de la machine fassent un angle γ avec les axes de coordonnées théoriques.

Soient y, z les coordonnées de la machine, Y, Z les coordonnées théoriques.

On a

$$\begin{cases} Y = y \cos \gamma - z \sin \gamma \\ Z = y \sin \gamma + z \cos \gamma \end{cases}$$

γ étant petit, on peut confondre son sinus avec l'arc et son cosinus avec l'unité. Les relations précédentes deviennent

$$\begin{cases} Y = y - z \gamma \\ Z = y \gamma + z \end{cases}$$

On a de même

$$Z' = y' \gamma + z'$$

Donc, en donnant aux indices p et q la même signification que dans la relation 45, il vient

$$\frac{Z_p - Z'_q}{f} = \frac{z_p - z'_q}{f} + \frac{y_p - y'_q}{f} \cdot \gamma$$

On voit que l'erreur commise en remplaçant $Z_p - Z'_q$ par $z_p - z'_q$ est

$$\frac{y_p - y'_q}{f} \cdot \gamma$$

On a approximativement

$$\frac{Z_p - Z'_q}{f} = g_1 (T_p + T - 2 T_0)$$

En définitive, l'erreur commise sur T_0 est

$$\gamma_1 = \frac{1}{2 g_1} \frac{y_p - y'_q}{f} \cdot \gamma$$

$$\frac{1}{2 g_1} \quad \text{est de l'ordre de } 10^4$$

$$y_p - y'_q \quad \text{de l'ordre de } 0 \text{ mm } 1$$

$$\gamma \quad \text{de l'ordre de } 3 \text{ ou } 4 \text{ minutes d'arc}$$

$$\text{Faisons } f = 2000 \text{ mm.}$$

On a

$$\gamma_1 = \frac{10}{2000} \cdot 0.1 < \frac{1}{1000} \text{ de seconde de temps.}$$

On n'a donc pas à se préoccuper de cette cause d'erreur.

CHAPITRE III

PRÉPARATION DES OBSERVATIONS. -- CALAGES

On procède, pour dresser le registre de calages, comme on le fait pour l'astrolabe à prisme de MM. Claude et Driencourt. On doit pourtant tenir compte de ce que l'angle du prisme peut être différent de 60° . Pour l'instrument grand modèle qui est à l'observatoire de Nice, cet angle est de 45° . On limite pour lui la liste des étoiles à celles dont la

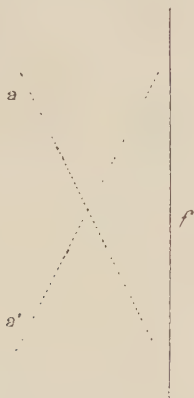


Fig. 18.

grandeur photographique est 4,5, les étoiles plus faibles n'étant pas observables.

On a vu (8^e problème) que pour que la quantité $\frac{I_0}{f}$ soit négligeable, il y a grand intérêt à ce que la coïncidence ait lieu pour toutes les étoiles au même point du cliché. Étant données la grande dimension de ces instruments et leur construction très soignée, il suffit, pour y parvenir, de bien faire, une fois pour toutes, les réglages, de caler ensuite la lunette à l'azimut indiqué par le registre de calages, et de déclencher enfin, en temps voulu, le mouvement du volet. L'instrument « petit modèle » donne à cet égard un résultat particulièrement satisfaisant,

ce qui est dû à ce que l'on a utilisé pour lui un pied existant, déjà muni d'un cercle très précis, permettant de faire les calages en azimut à moins de 10 secondes d'arc près. Pour cet instrument, le petit micromètre fixé sur la boîte porte-châssis n'est pas du tout indispensable.

Avec l'instrument grand modèle, il n'en est pas de même. Pour cause d'économie, on a cru devoir se contenter d'un cercle beaucoup moins précis (gradué de 20' en 20') centré aussi bien que possible, mais non d'une façon rigoureuse. Le calage se fait à environ 2 minutes d'arc près. L'incertitude qui en résulte pour la position du point de coïncidence est de 0 mm. 5. Cette précision est suffisante. Il est pourtant possible d'obtenir un résultat meilleur si l'on examine visuellement dans le micromètre, avant l'observation, les deux images, et si on les amène en un point convenable du champ : un fil de laiton est tendu dans ce but dans le réticule. C'est sur lui qu'on désire que la coïncidence des images, se produise. Soient a et a' ces deux images, telles qu'on les aperçoit dans le micromètre quelques instants avant l'observation. L'arête du prisme ayant été préalablement rendue horizontale, elles sont constamment sur une même verticale ($Y' = Y$). — Soit f le fil du micromètre, Y_0 l' Y de la coïncidence, Y, Z, Y', Z' , les coordonnées des 2 points a et a' . Nous calculerons pour chaque étoile le rapport $\frac{Z - Z'}{Y - Y_0}$. Ce rapport est égal

à $\frac{2f\varepsilon}{f(\omega_0 - \omega) \cos 2V}$ (formule 13), ou encore, d'après les formules 41, à $\frac{-2g_1}{l_1 \cos 2V}$, que l'on peut aisément calculer. On saura ainsi immédiatement quel rapport devra exister entre la distance verticale des deux images et leur distance au fil f , pour que la coïncidence ait lieu sous ce fil. On rectifiera, par une pression très légère, la position de la lunette. Puis on escamotera le miroir à 45°; on déclenchera le mouvement du volet et on ouvrira le châssis. On le refermera une minute environ après l'heure prévue de la coïncidence. L'observation sera alors terminée.

La stabilité de ces instruments est assez grande pour que l'horizontalité de l'arête du prisme étant réglée une fois pour toutes, elle demeure réglée, pendant toute la soirée d'observation, pour tous les azimuts de la lunette.

CHAPITRE IV

APPLICATION

Nous nous sommes proposés d'étudier l'instrument photographique grand modèle de l'observatoire de Nice, d'après la théorie qui vient d'être exposée. Nous avons fait ce travail pendant que l'on déterminait au moyen d'instruments méridiens la différence de longitude entre les observatoires de Paris et de Nice. Il a été ainsi possible de comparer nos résultats à ceux obtenus à l'observatoire de Nice avec l'instrument méridien et aussi de les rapporter à la pendule directrice de l'observatoire de Paris, grâce aux signaux de T. S. F. qui étaient émis chaque soir par la tour Eiffel à 21 h. 10 de temps moyen. Cette pendule offre beaucoup plus de garanties de régularité de marche que celle de l'observatoire de Nice.

L'instrument a été installé sur la terrasse de l'observatoire, entre les pavillons de l'Equatorial Coudé et du Petit Méridien.

Le mouvement du volet était commandé par la pendule Fénon. Le schéma général du montage était celui de la figure 13.

On a mesuré, chaque soir, toutes les heures, les retards d'ouverture et de fermeture du volet. Ces retards sont de l'ordre de $\frac{5}{100}$ de seconde.

Ils peuvent varier de 1 ou 2 centièmes dans le cours de la soirée. Mais, généralement, cette variation qui est faible, ne présente pas une allure systématique et l'on a pu presque toujours adopter, pour toute la soirée la valeur moyenne des retards individuels.

La même pendule (Fénon) actionnait le volet de l'instrument photographique des hauteurs égales et le chronographe à plume Bréguet qui servait à enregistrer les tops donnés à l'instrument méridien. M. Fayet observait à ce dernier instrument. Un dispositif analogue à celui de l'instrument des hauteurs égales permettait de déterminer toutes les heures le retard du chronographe Bréguet, de telle sorte que les observations faites aux deux instruments ont pu être absolument comparables.

Je donne, dans ce qui suit, le détail complet de la réduction de l'une des soirées qui ont été faites : celle du 10 mars, afin de montrer comment peuvent être conduits les calculs. J'ai cru, afin de limiter l'étendue de

ce mémoire, ne devoir donner que les résultats finaux conclus pour les autres soirées.

Nous calculerons d'abord les constantes instrumentales, et nous indiquerons au fur et à mesure les simplifications de détail qui pourront être apportées à tous ces calculs.

On a observé, à Nice, les 26 et 28 février, 1^{er}, 2, 5, 7, 8, 9, 10, 16, 17 et 18 mars 1921.

Calcul des constantes g_1 et g_2 . — Ces quantités sont fournies par les formules 52 et 54 (8^e problème). Il est aisé de voir qu'elles peuvent être calculées une fois pour toutes pour une longue période. — Nous avons déterminé les quantités g_1 et g_2 pour chaque étoile pour le 10 mars, et les valeurs obtenues ont été valables pour toute la période d'observation.

On a dit (8^e problème) que ce calcul exige la connaissance des quantités h_0 , H_0 , $\frac{d\rho}{d\varepsilon}$.

On calcule la première en employant la seconde formule 53 où l'on remplace T_0 et Cp par leurs valeurs déduites des observations de deux étoiles prises l'une à son passage est, l'autre à son passage ouest. On ne tiendra pas compte, dans ce calcul, des termes du 2^e ordre.

On est donc conduit à appliquer l'une des méthodes indiquées au 4^e problème, la première par exemple, à deux étoiles de la soirée, telles que α Bouvier et β Gémeaux.

Nous donnerons ici, à titre d'exemple, le détail du calcul pour α Bouvier seulement.

Les deux premières colonnes contiennent les lectures z de la machine, qui se rapportent aux points correspondants des deux trajectoires.

Dans la troisième est la différence des z des points correspondants. Dans la quatrième sont les heures relatives à ces points.

Dans les colonnes suivantes se trouve le calcul de l'intervalle de temps qui s'écoule entre les heures indiquées à la quatrième colonne et l'heure où le z de l'image est égal au z de l'horizontale de coïncidence. On a calculé la vitesse verticale a des images par la formule

$$2a = \frac{\sum [(z' - z)_m - (z' - z)]}{\sum (T_m - T)}$$

et on a déduit les intervalles de temps cherchés ΔT par la formule :

$$\Delta T = \frac{z' - z}{2a}.$$

10 MARS — α BOUVIER (TABLEAU I)

z	z'	$z' - z$	T	$(l'-l)_{m'} - (l'-l)$	$T_m - T$	$l(z' - z)$	$1 \Delta T$	ΔT	T_0	Résidus
			h. m							
140.0204	137.1132	—2.9072	11.9 11	3.0516	16	0.46348	1.18079	15.16	26.16	—0.09
139.8292	3002	— .5290	13	2.6734	14	40295	.12026	13.19	19	— 6
6444	4984	— .1460	15	.2904	12	33163	04894	11.19	19	— 6
4510	6824	—1.7686	17	1.9130	10	24763	0.96494	9.22	22	— 3
2812	8710	— .4102	19	5556	8	14928	86659	7.36	36	— 11
0844	138.0652	— .0192	21	1636	6	00821	72552	5.32	32	— 7
138.8884	2696	—0.6188	23	0.7632	4	1.79155	50886	3.23	23	— 2
6924	4496	—0.2428	25	0.3872	2	38525	10256	1.27	27	— 2
4946	6424	+0.1478	27	—0.0034	0	16967	1.88698	— 0.77	23	— 2
3176	8250	+0.5074	29	—0.3630	2	70535	0.42266	— 2.65	35	— 10
1248	139.0326	+0.9078	31	—0.7634	4	95799	67530	— 4.73	27	— 2
137.9312	2214	+1.2902	33	—1.1458	6	0.11066	82797	— 6.73	27	— 2
7250	4054	+ .6804	35	—1.5360	8	22541	94272	— 8.76	24	— 1
5352	6012	+2.0660	37	—1.9216	10	31513	1.03244	—10.78	22	— 3
3358	7966	+ .4608	39	—2.3164	12	39108	10839	—12.83	17	— 8
. 1606	9824	+ .8218	41	—2.6774	14	45053	16784	—14.71	20	— 4
136.9724	140.1874	+3.2150	43	—3.0706	16	50718	22449	—16.77	23	— 2
$(z' - z)_m = -0.1444$			$T_m = 27^s.000$		26.8420	140	26 25			
$2 a = \frac{26.8420}{140} = 0.19173$										
$\log 2 a = 1.28269$ $T_0^{(1)}$ conclu : $11^h 9^m 26^s 25$										

En opérant de même pour β Gémeaux on trouve :

$$T_0^{(2)} \text{ conclu : } 11^h.15^m.29^s.97$$

Ces deux étoiles satisfont chacune à la relation :

$$\sin h_0 = \sin \Phi \sin \delta + \cos \Phi \cos \delta \cos (\alpha - T_0) + Cp \cos \Phi \cos \delta \sin (\alpha - T_0).$$

On a donc deux relations entre h_0 et Cp . On les résout et on trouve une valeur très approchée de $\sin h_0$:

$$\sin h_0 = 0.70553.$$

Pour le calcul de g_1 et de g_2 , il n'est pas nécessaire de calculer à nouveau pour chaque soirée cette valeur de $\sin h_0$. En effet les quantités g_1 et g_2 sont, dans la formule 51, les coefficients de termes eux-mêmes très faibles (trois ou quatre secondes de temps) et une erreur d'une ou deux secondes d'arc commise sur h_0 est entièrement négligeable. h_0 dépend seulement de l'angle du prisme et de la réfraction. On pourra donc d'une façon générale adopter pour lui une valeur calculée une fois pour toutes et qui constituera en quelque sorte une caractéristique de l'instrument.

Poursuivons le calcul de g_1 et g_2 pour les étoiles observées.

On appliquera les formules 52 et 54 :

$$g_1 = - \frac{n_1 \cos \Phi \cos \delta \sin H_0}{\cos h_0} \left[1 - \left(\frac{d \rho}{d \varepsilon} \right)_0 \right]$$

$$g_2 = - \frac{n_1^2}{2} \frac{\cos \Phi \cos \delta \cos H_0}{\cos h_0} + \frac{n_1^2}{2} \frac{\cos^2 \Phi \cos^2 \delta \sin^2 H_0 \sin h_0}{\cos^3 h_0}.$$

Dans la table I de la Connaissance des Temps, on trouve que, au voisinage de la hauteur 45° , la réfraction varie de $0''34$ pour une variation de hauteur de l'étoile de 10 minutes d'arc soit de $0''000567$ pour une variation d'une seconde.

On a donc :

$$\left(\frac{d \rho}{d \varepsilon} \right)_0 = + 0,000567$$

$$1 - \left(\frac{d \rho}{d \varepsilon} \right)_0 = 0,999433.$$

On a adopté pour la latitude Φ du pilier de l'instrument des hauteurs égales :

$$\Phi = 43^\circ 43' 16''$$

Faisons le calcul pour l'étoile α Bouvier (10 mars) :

TABLEAU II

δ	19.35.20.7		
$l \sin \Phi$	1.83957	$l \frac{n^2 \cos \Phi}{2 \cos h_0}$	9.43082
$l \sin \delta$	1.52539	$l \cos H_0$	1.84253
$l \sin \Phi \sin \delta$	1.36496	$l \cos \delta$	1.97411
		$l g_{2,1}$	9.24746
$\sin h$	0.70553	$l n^2 \frac{\cos^2 \Phi \sin h_0}{2 \cos^2 h_0}$	9.43740
$\sin \Phi \sin \delta$	0.23172	$l \cos^2 \delta$	1.94822
N	0.47381	$l \sin^2 H_0$	1.71244
$l \cos \Phi$	1.85897	$l g_{2,2}$	9.09806
$l \cos \delta$	1.97411		
$l \cos \Phi \cos \delta$	1.83308	$g_{2,1}$	— 0.000 000 00 1768
$l N$	1.67561	$g_{2,2}$	— 1253
		g_2	— 0.000 000 000 515
$l \cos H_0$	1.84253		
$l \sin H_0$	1.85622		
$l n_1 0.999433 \cos \Phi$	5.72039		
$l \cos \delta$	1.97411		
Σ	5.55072		
$l \cos h_0$	1.85043		
$l g_1$	5.70027		

TABLEAU III

Valeurs de $\log g_1$ et de g_2 pour toutes les étoiles observées (10 mars).

ÉTOILES	LOG g_1	g_2	ÉTOILES	LOG g_1	g_2
λ G Ourse.....	5.68514	+0.000 000 000 305	β Lion.....	5.67214	—0.000 000 000 864
α G Ourse.....	5.52140	+	η G Ourse.....	5.64650	.. 312
δ Cassiopée....	5.55105	+	σ Lion.....	5.55347	— 1705
β G Ourse.....	5.57914	+	γ Gémeaux....	5.68283	— 745
ε Lion.....	5.71521	—	α Cocher.....	5.67112	.. 316
λ Taureau.....	5.64642	—	β P Ourse.....	5.28826	.. 40
π , Orion.....	5.52848	—	θ Cocher.....	5.70873	.. 230
ψ G Ourse.....	5.67674	+	λ Gémeaux....	5.68424	— 728
ζ Lion.....	5.71447	—	ζ Gémeaux....	5.70490	— 441
η Taureau....	5.71460	—	β Cocher.....	5.67665	.. 313
σ Taureau....	5.71448	—	δ Gémeaux....	5.70995	— 351
η Lion.....	5.68719	—	ε Vierge.....	5.63625	— 1191
β Persée.....	5.69695	+	θ Gémeaux....	5.71602	.. 160
ϕ Lion.....	5.62155	—	η Bouvier.....	5.69643	— 571
α Taureau....	5.68201	—	α Gémeaux....	5.71609	— 212
α Lion.....	5.64733	—	α Bouvier.....	5.70027	— 515
α Persée.....	5.64735	+	β Gémeaux....	5.72020	— 39
ν Persée.....	5.68975	+	δ Bouvier.....	5.71678	.. 147
α Orion.....	5.57364	—	η Dragon.....	5.52782	.. 205
δ Lion.....	5.70593	—	θ Couronne....	5.71928	.. 88
δ Persée.....	5.66124	+	α Couronne....	5.71944	— 94
ε G Ourse.....	5.58894	+	γ Couronne....	5.71901	— 114
ρ Lion.....	5.61382	—	β Hercule.....	5.70843	— 380
ι Cocher.....	5.71763	+	ι G Ourse.....	5.65591	.. 316
α Ch de Chasse	5.70399	+	α Serpent.....	5.56829	— 1681
β Taureau....	5.72031	—	δ Hercule.....	5.71674	— 194

Calcul de f . — En opérant comme il a été dit au huitième problème, on a trouvé :

$$f = 1905 \text{ mm. } 8.$$

Cette valeur a été déduite de 18 observations d'étoiles, qui ont donné les résultats individuels suivants :

1909.1	1907.2
1905.7	1903.8
1903.2	1906.1
1907.7	1905.0
1904.0	1906.3
1904.7	1904.4
1905.3	1906.7
1909.2	1907.3
1904.0	1904.3

Moyenne 1905.8.

Calcul de V. — Cette constante ne s'introduit que dans des termes extrêmement petits de l'ordre de quelques millièmes de seconde de temps. Aussi on a adopté $2 V = 45^\circ$ ce qui a l'avantage de simplifier un peu le calcul.

$\frac{I_0}{f}$. — On a cherché à rendre cette quantité aussi petite que possible. On a employé pour cela le troisième procédé, indiqué à la fin du 8^e problème.

Les constantes étant ainsi déterminées, on a appliqué la formule 51 aux mesures relatives à chaque étoile.

Si l'on ne tient pas compte des termes en $\frac{I_0}{f}$ la relation 51 peut s'écrire :

$$T_0 = T_i - A_z + B_{T_2} + C_{y_2} + D + E$$

où :

$$T_i = \frac{\sum \frac{T_p}{n} + \frac{\sum T'_q}{n'}}{2}$$

$$A_z = \frac{\sum \frac{z_p}{n} - \frac{\sum z'_q}{n'}}{2 f g_1}$$

$$B_{T_2} = \frac{g_2}{2 g_1} \left[\sum \frac{(T_p - T_0)^2}{n} + \frac{\sum (T'_q - T_0)^2}{n'} \right]$$

$$C_{y_2} = \frac{\text{tg } 2 V}{2 g_1} \frac{\sum \frac{(y_p + y'_p)^2}{n} + \frac{\sum (y_q + y'_q)^2}{n'}}{2 f^2}$$

$$D = \frac{2 + \cos 2 V}{8 g_1 \sin 2 V} \frac{(y_p - y'_p)^2}{f^2}$$

$$E = \frac{\cos^2 V}{4 g_1 \sin 2 V} \frac{y_p - y'_p}{f} \frac{\frac{\sum (y_p + y'_p)}{n} - \frac{\sum (y_q + y'_q)}{n'}}{f}$$

A titre d'exemple, nous donnons, dans le tableau ci-dessous le détail des mesures faites sur α Bouvier (10 mars).

10 mars α Bouvier.

Repère y : 115.0910.

TABLEAU IV

z_i	z	T	Y	Y'
140.0204	137.1132	11.9.11	117.6412	117.3026
139.8202	3002	13		
6444	4984	15		
4510	6824	17		
2812	8710	19	116.9332	
0844	138.0652	21		116.4206
138.8884	2696	23		
6924	4496	25		
4946	6424	27		
3176	8250	29	116.0646	
1248	139.0320	31		115.5330
137.9312	2214	33		
7250	4054	35		
5352	6012	37		
3358	7966	39		
1606	9824	41	114.9856	
136.9724	140.1874	43	114.8028	114.4736
$\frac{\sum}{n} z_p = 138.4993$	$\frac{\sum}{n'} z'_q = 138.6438$	$\frac{\sum}{n} T_p = \frac{\sum}{n'} T_q = 27.000$		

A chaque mesure faite sur un point de la traînée directe correspond une mesure faite sur un point de la traînée réfléchie. On a donc, dans ce cas particulier

$$\frac{\sum}{n} T_p = \frac{\sum}{n'} T'_q.$$

On a ici

$$\frac{\sum}{n} z_p - \frac{\sum}{n'} z'_q = -0,1445$$

et

$$T_i = \frac{\frac{\sum}{n} T_p + \frac{\sum}{n'} T'_q}{2} = 27.000$$

Le calcul du terme T_i est presque immédiat.

Quant au terme A_i son calcul sera aussi très rapide si une table auxiliaire donne, pour chaque étoile, la valeur de $\log 2 f g_1$.

Pour α Bouvier on a

$$\begin{aligned} \log 2 f g_1 &= \bar{1}.28135 \\ \log (-0,1445) &= \bar{1}.15987_n \\ l A_i &= \bar{1}.87852_n. \end{aligned}$$

La table suivante, qui est naturellement valable pour toute la période donne pour chaque étoile $\log 2f/g_1$ et les quantités $\frac{g_2}{2g_1}$ et $\frac{1}{2f^2g_1}$ qui entrent en facteur dans les termes B_{T_2} et C_{y^2} .

TABLEAU V

ÉTOILES	LOG $2f/g_1$	$\frac{g_2}{2g_1}$	$\frac{1}{2f^2g_1}$	ÉTOILES	$\log 2f/g_1$	$\frac{g_2}{2g_1}$	$\frac{1}{2f^2g_1}$
λ G Ourse.....	1.26622	+0.000 00315	+0.00284	β Lion.....	1.25322	+0.000 00919	+0.00293
α G Ourse.....	1.10248	+ 298	+ 414	η G Ourse.....	1.22758	+ 350	+ 311
δ Cassiopée....	1.13213	— 320	— 387	σ Lion.....	1.13455	+ 2384	+ 385
β G Ourse.....	1.16022	— 260	+ 363	γ Gémeaux....	1.26391	— 770	— 286
ε Lion.....	1.29629	— 230	+ 265	α Cocher.....	1.25220	— 340	— 294
λ Taureau.....	1.22750	+ 1250	— 311	β P Ourse.....	2.86934	+ 104	+ 709
π_1 Orion.....	1.10956	+ 2693	— 408	θ Cocher.....	1.28981	— 220	— 269
ψ G Ourse.....	1.25782	+ 320	+ 290	λ Gémeaux....	1.26532	— 750	— 285
ζ Lion.....	1.29555	— 250	+ 266	ζ Gémeaux....	1.28598	— 435	— 272
η Taureau.....	1.29568	+ 240	— 266	ζ Cocher.....	1.25773	— 330	— 290
γ Taureau....	1.29556	— 244	— 266	δ Gémeaux....	1.29103	— 340	— 269
η Lion.....	1.26827	— 810	+ 283	ε Vierge.....	1.21733	+ 1380	+ 318
β Persée.....	1.27803	— 283	— 277	θ Gémeaux....	1.29710	+ 150	— 265
α Lion.....	1.20263	— 1556	+ 329	η Bouvier....	1.27751	+ 574	+ 277
α Taureau.....	1.26309	+ 790	— 286	α Gémeaux....	1.29717	+ 200	— 265
α Lion.....	1.22841	+ 1240	— 310	α Bouvier....	1.28135	— 510	+ 275
α Persée.....	1.22843	— 350	— 310	ζ Gémeaux....	1.30128	+ 40	— 262
ν Persée.....	1.27033	— 305	— 281	δ Bouvier....	1.29786	+ 140	+ 265
α Orion.....	1.15472	— 2140	— 387	η Dragon.....	1.10890	+ 303	+ 408
δ Lion.....	1.28701	+ 420	+ 271	θ Couronne....	1.30036	+ 84	+ 263
δ Persée.....	1.24232	— 3460	— 300	α Couronne....	1.30052	— 89	+ 263
ε G Ourse.....	1.17002	— 340	+ 355	γ Couronne....	1.30009	— 110	— 263
ρ Lion.....	1.19490	— 1650	+ 335	β Hercule.....	1.28951	— 371	+ 270
ι Cocher.....	1.29871	— 130	— 263	ι G Ourse.....	1.23699	— 349	— 304
α Ch de Chasse	1.28507	+ 250	+ 272	α Serpent.....	1.13937	— 2324	+ 381
β Taureau.....	1.30139	— 25	— 262	δ Hercule.....	1.29782	— 186	+ 264

Passons au calcul des termes du second ordre :

$$1^{\text{er}} \text{ Terme} \quad B_{T_2} = \frac{g_2}{2g_1} \left[\frac{\sum}{n} (T_p - T_0)^2 + \frac{\sum}{n'} (T'_q - T_0)^2 \right].$$

Le facteur $\frac{g_2}{2g_1}$ est donné par la table ci-dessus.

On déterminera l'heure T_0 de la coïncidence à une seconde près, à vue. Pour α Bouvier 10 mars, on adoptera :

$$T_0 = 9^{\text{h}}26^{\text{s}}$$

heure où l'on a à peu près : $Z = Z'$.

Soit K l'intervalle de temps qui sépare deux points consécutifs. Si T_1 est la première et T_n la dernière valeur de T , $n - 1$ le nombre d'intervalles, on a

$$K = \frac{T - T_1}{n - 1}.$$

Soit ν_p le nombre d'intervalles qui séparent le point de rang p de la coïncidence. (ν_p est affecté du signe $-$ ou $+$ suivant que le point précède ou suit la coïncidence.)

On a

$$\sum \frac{\nu_p}{n} (T_p - T_0)^2 = K^2 \sum \frac{\nu_p^2}{n}.$$

Si ν_0 est le nombre d'intervalles qui séparent le premier point de la coïncidence, on a

$$\nu_p^2 = (\nu_0 + p)^2.$$

Donc

$$\sum \frac{\nu_p^2}{n} = \nu_0^2 + \frac{2\nu_0}{n} [1 + 2 + \dots + (n-1)] + \frac{1}{n} [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2]$$

Comme il s'agit de très petites corrections, on regardera n comme toujours pair et l'on a

$$\sum \frac{\nu_p^2}{n} = \nu_0^2 + \nu_0 n + \frac{1}{n} [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2].$$

Les deux premiers termes se calculent directement :

$$\nu_0 (\nu_0 + n).$$

La coïncidence ayant lieu presque toujours au milieu de l'observation, ν_0 sera généralement négatif, et la somme considérée sera le produit de la différence entre le nombre total de points mesurés sur la trajectoire et le nombre d'intervalles qui séparent le premier point de la coïncidence, par ce nombre d'intervalles.

Le troisième terme est donné par la table suivante :

TABEAU VI

n	3 ^e TERME	n	3 ^e TERME	n	3 ^e TERME	n	3 ^e TERME
1		6	9	11	37	16	78
2	0.5	7	13	12	42	17	88
3	1.7	8	18	13	50	18	99
4	4.0	9	23	14	58	19	111
5	6.0	10	29	15	68	20	124

Ainsi, pour α Bouvier on a $n = 17$ $\nu_0 = -9$
donc

$$\nu_0^2 + \nu_0 n = -8 \times 9 = -72.$$

Le troisième terme est $+ 88$. On a

$$\frac{g_2}{2 g_1} = -0,000\ 005.$$

Enfin $K^2 = 4$.

$$\frac{\sum}{n} (T_p - T_0)^2 = 64 \text{ environ}$$

$$\frac{\sum}{n} (T_p - T_0)^3 + \frac{\sum}{n'} (T'_q - T_0)^2 = 128$$

$$B_{T_2} = -128 \times 0,000\ 005 = -0,0006.$$

Cet exemple suffit à montrer que dans la plupart des cas ce terme est extrêmement petit. Il ne prend une valeur sensible que si l'on utilise sur les deux traînées des points très éloignés de la coïncidence :

Calcul du terme

$$C_{\nu^2} = \frac{\text{tg } 2 V}{2 f^2 g_1} \frac{\frac{\sum}{n} \left(\frac{y_p + y'_p}{2} \right)^2 + \frac{\sum}{n} \left(\frac{y_q + y'_q}{2} \right)^2}{2}.$$

On a, dans le cas de l'instrument des hauteurs égales de Nice :

$$\text{tg } 2 V = 1.$$

Le facteur $\frac{1}{2 f^2 g_1}$ est donné par la table V.

Quant au dernier facteur on peut presque toujours, avec une approximation suffisante, le remplacer par :

$$\frac{\sum}{n} y_p^2.$$

En effet, sauf dans des cas bien particuliers, on aura pu, pour presque tous les points des trajectoires pointer les deux images directe et réfléchie. On pourra donc écrire

$$\frac{\sum}{n} \left(\frac{y_p + y'_{p_1}}{2} \right)^2 = \frac{\sum}{n'} \left(\frac{y_q + y'_q}{2} \right)^2.$$

De plus quand les réglages sont bien faits on a d'une façon très approchée

$$y_p = y'_p \quad y_q = y'_q.$$

Si d'ailleurs ces conditions ne sont pas réalisées le calcul, un peu plus long, est conduit de la même manière.

On emploiera le même procédé que pour le calcul du terme B_{T2} .

Dans le cas de α Bouvier 10 mars, la variation d' y pendant deux secondes est d'environ 0 mm. 19.

On a donc :

$$K^2 = 0,036.$$

L' y du repère est 115.09. Les points des traînées dont l' y a cette valeur sont séparés du premier par environ 14 intervalles.

En définitive, on a :

$$\frac{\Sigma}{n} y_p^2 = 0,036 [14^2 - 17 \times 14 + 88] = 2 \text{ environ}$$

$$C_{y2} = 2 \times 0,00275 = + 0^s005.$$

Ce terme peut ne pas être négligeable si l'on utilise des points très éloignés de la coïncidence :

Calcul du terme

$$D = \frac{1}{2 f^2 g_1} \frac{2 + \cos 2 V}{4 \sin 2 V} (y_p - y'_p)^2.$$

Faisant $2 V = 45^\circ$, il se réduit à

$$D = \frac{1}{2 f^2 g_1} \frac{1 + 0,35}{1,41} (y - y'_p)^2$$

ou approximativement

$$D = \frac{(y_p - y'_p)^2}{2 f^2 g_1}$$

Le facteur $\frac{1}{2 f^2 g_1}$ est donné par la table V.

La quantité $y_p - y'_p$ est la différence des y de 2 points correspondants quelconques.

Dans le cas de α Bouvier 10 mars, on a

$$y_p - y'_p = 0,3$$

$$(y_p - y'_p)^2 = 0,09$$

$$D = 0^s0002 \text{ quantité négligeable.}$$

Pour que D soit négligeable, il suffit que

$$\frac{1}{2 f^2 g_1} (y_p - y'_p)^2 < 0^s001.$$

Or pour les étoiles voisines du premier vertical, on a approximativement

$$\frac{1}{2 g_1 f^2} = + 0^s003.$$

L'inégalité précédente devient

$$\begin{aligned} (y_p - y'_p)^2 &< \frac{1}{3} \\ y - y'_p &< 0,57. \end{aligned}$$

Donc, toutes les fois que la différence des y de deux points correspondants sera plus petite que 0.57, on aura $D = 0$. C'est ce qui aura lieu le plus fréquemment. On vient de voir que c'est aussi le cas de α Bouvier 10 mars.

Calcul du terme

$$E = \frac{\cos^2 V}{2 g_1 \sin 2 V} \frac{y_p - y'_p}{f} \frac{\frac{\sum}{n'} (y_q + y'_q) - \frac{\sum}{n} (y_p + y'_p)}{2 f}$$

A la condition que les réglages soient à peu près correctement faits, on pourra écrire

$$E = \frac{\cos^2 V}{2 g_1 \sin 2 V} \frac{y_p - y'_p}{f} \frac{\frac{\sum}{n'} y'_q - \frac{\sum}{n} y_p}{2 f}$$

Dans le cas de l'instrument de Nice :

$$E = \frac{1}{2 f^2 g_1} \frac{1}{\sqrt{2}} (y_p - y'_p) \left(\frac{\sum}{n'} y'_q - \frac{\sum}{n} y_p \right)$$

Pour $\frac{1}{2 f^2 g_1} = 0.003$ et pour $y_p - y'_p < 0,57$, ce terme est négligeable lorsque

$$\frac{0,003}{1.414} \times 0,57 \left(\frac{\sum}{n'} y'_q - \frac{\sum}{n} y_p \right) < 0,001$$

ou

$$\frac{\sum}{n'} y'_q - \frac{\sum}{n} y_p < 1.$$

C'est pratiquement ce qui a toujours lieu. Pour qu'il n'en soit pas ainsi, il faudrait que l'on ait pointé des régions très différentes des deux trajectoires directe et réfléchie

Ce terme est nul aussi dans le cas de α Bouvier 10 mars.

Appliquons ce qui précède à titre d'exemple à la soirée du 10 mars. On obtient les heures de coïncidence des images par les calculs suivants :

TABLEAU VII

ÉTOILES	$(Z_m - Z_m') / (Z_m - Z_m')$	t / λ	$\lambda \left(\frac{Z_m - Z_m'}{2 \sqrt{g_1}} \right)$	$\frac{Z_m - Z_m'}{2 \sqrt{g_1}}$	T	Σ	Coincidences	Σ_s	B_{T_s}	C_{Y_s}	D	E
e Lion.....	+0.3255		1.51255	+1.645	6.21.53.134	6.21.54.779	6.21.54.786	+0.007	0	+0.007	0	0
δ Hyde.....	+0.4189		1.62211	+3.157	41.41.706	41.44.863	41.44.872	+	9	+13	+0.002	0
ϕ G Ourse.....	+0.1006		1.00260	+0.556	47.49.270	47.49.826	47.49.828	2	0	2	0	0
ζ Lion.....	-0.2272		1.35641 ⁿ	-1.150	55. 0.539	54.59.389	54.59.392	+	3	0	3	0
η Taureau.....	+0.2950		1.46982	-1.493	7. 3.17.167	7. 3.15.674	7. 3.15.669	-	5	0	5	0
β Persée.....	+0.3190		1.50379	-1.682	13. 2.318	13. 0.636	13. 0.630	-	6	0	5	1
α Lion.....	+0.0489		1.68931	+0.289	33.53.611	33.53.900	33.53.906	-	6	3	7	2
α Persée.....	+0.5194		1.71550	-3.070	49.41.534	49.38.464	49.38.449	-	15	+	18	0
α Orion.....	+2.7790		1.44389	-10.462	54.46.100	54.26.638	54.26.647	+	9	+	7	4
δ Lion.....	+0.2453		1.38970	+1.267	8. 2. 0.067	8. 2. 1.334	8. 2. 1.337	+	3	0	3	0
δ Persée.....	+5.1188		0.70917	-29.209	4.11.591	3.42.292	3.42.281	-	11	8	2	1
ρ Lion.....	-0.1381		1.14019 ⁿ	-0.882	12.45.000	12.44.118	12.44.125	+	7	3	10	0
α Cocher.....	-0.3388		1.73143 ⁿ	+3.015	9.33.31.143	9.33.34.158	9.33.34.151	-	7	2	5	0
β P Ourse.....	-1.5807		0.19885 ⁿ	-21.356	39.31.000	39. 9.644	39. 9.644	0	0	0	0	0
θ Cocher.....	+0.1216		1.08493	-0.624	55.25.929	55.25.305	55.25.303	-	2	0	2	0
λ Gémeaux.....	+0.4033		1.60563	-2.189	10. 6.10.765	10. 6. 8.576	10. 6. 8.573	-	3	+	5	0
γ Gémeaux.....	+0.5812		1.76433	-3.009	8.19.991	8.16.982	8.16.979	-	3	0	3	0
δ Gémeaux.....	+0.7401		1.86929	-3.787	29.44.084	29.40.247	29.40.245	-	2	0	2	0
ϵ Vierge.....	+0.7974		1.90168	+4.834	32.37.449	33. 2.283	33. 2.298	-	15	3	18	0
α Gémeaux.....	-0.0199		2.29885 ⁿ	+0.100	11. 2.41.730	11. 2.41.830	11. 2.41.827	-	3	0	3	0
α Bouvier.....	-0.1445		1.15987 ⁿ	-0.756	9.27.000	9.26.244	9.26.249	+	5	0	5	0
γ Gémeaux.....	-0.3470		1.54033 ⁿ	-0.734	15.28.236	15.29.970	15.29.959	-	11	0	10	1
δ Bouvier.....	-0.0391		2.29783	+0.197	23. 7.400	23. 7.203	23. 7.208	+	5	0	5	0
α Lion.....	+0.1435		1.15685	-0.900	57.56.875	57.55.975	57.55.975	0	+	3	3	0

On calcule ensuite la correction de pendule comme il est dit au 5^e problème.

Pour cela, on détermine d'abord les quantités $d'h$ de la relation 25, ainsi que les coefficients $\cos A$ et $\sin A \cos \Phi$.

On a adopté pour valeurs approchées de la hauteur d'observation et de la correction de pendule

$$\begin{aligned} h_a &= 44^\circ 52' 21'' \\ Cp_a &= - 1^m \end{aligned}$$

et comme valeur de la latitude

$$\Phi = 43.43.15.8$$

On a fait les calculs relatifs à $\cos A$ et à $\sin A \cos \Phi$ au moyen d'une table de logarithmes à 5 décimales, ceux relatifs à $d'h$ au moyen d'une table à 7 décimales.

Dans le calcul de $d'h$, on a corrigé les heures T de coïncidence des retards d'ouverture et de fermeture du volet.

Nous avons dit au chapitre I^{er} que l'heure relative au milieu d'un trait dont le numéro d'ordre à partir de l'interruption origine est n est

$$H = M^{\text{minutes}} + 2n - 0,5 + \frac{r + r'}{2}$$

Si S désigne la seconde relative au commencement du trait, cette relation peut s'écrire aussi

$$H = M + S + 0,5 + \frac{r + r'}{2}$$

C'est la quantité $0,5 + \frac{r + r'}{2}$ que nous appelons ici « Retard ».

A titre d'exemple, nous donnons ci-après le calcul complet des quantités $d'h$, $\cos A$ et $\sin A \cos \Phi$ pour la soirée du 10 mars. Les valeurs conclues pour $\cos A$ et $\sin A \cos \Phi$ sont d'ailleurs valables pour toute la période d'observation.

TABLEAU VIII. — Calcul de $d'h$ (10 mars)

ÉTOILES δ	ϵ Lion 24.8.4.35	δ Hydre 5.58.31.27	ψ G. Ourse 44.55.24.69	ζ Lion 23.48.26.32	η Taureau 23.51.40.36	β Persée 40.39.12.41
T + C_{pa}	6.20.54.786	6.40.44.872	6.45.49.828	6.52.59.392	7. 2.15.669	7.12. 0.630
Retard	0.540	0.540	0.540	0.540	0.540	0.540
T + C_{pa} + Ret	6.20.55.326	6.40.45.412	6.45.50.368	6.52.59.932	7. 2.16.209	7.12. 1.170
α	9.41.24.578	8.33.30.641	11.5.16.315	10.12.20.366	3.42.48.007	3. 3. 2.150
$\alpha - T - C_{pa} - \text{Ret}$	3.20.29.252	1.52.45.229	4.19.25.947	3.19.20.434	3.19.28.202	—4. 8.59.020
$l \sin \Phi$	$\bar{1}.8395711$					
$l \sin \delta$	$\bar{1}.6115966$	$\bar{1}.0174536$	$\bar{1}.8489045$	$\bar{1}.6060179$	$\bar{1}.6069427$	$\bar{1}.8139026$
$l \sin \Phi \sin \delta$	$\bar{1}.4511677$	$\bar{2}.8570247$	$\bar{1}.6884756$	$\bar{1}.4455890$	$\bar{1}.4465138$	$\bar{1}.6534737$
$l \cos \Phi$	$\bar{1}.8589660$					
$l \cos \delta$	$\bar{1}.9602747$	$\bar{1}.9976339$	$\bar{1}.8500639$	$\bar{1}.9613775$	$\bar{1}.9611970$	$\bar{1}.8800495$
$l \cos (\alpha - T - C_{pa} - \text{Ret})$	$\bar{1}.8069641$	$\bar{1}.9451724$	$\bar{1}.6282473$	$\bar{1}.8095524$	$\bar{1}.8092615$	$\bar{1}.6680854$
lp	$\bar{1}.6262048$	$\bar{1}.8017723$	$\bar{1}.3372772$	$\bar{1}.6298959$	$\bar{1}.6294245$	$\bar{1}.4071009$
$\sin \Phi \sin \delta$	0.2825971	0.0719490	0.4880627	0.2789903	0.2795850	0.4502707
p	0.4228680	0.6335375	0.2174089	0.4264773	0.4260146	0.2553295
$\Sigma = \sin h$	0.7054651	0.7054865	0.7054716	0.7054676	0.7055996	0.7056002
$l \sin h$	$\bar{1}.8484756$	$\bar{1}.8484887$	$\bar{1}.8484796$	$\bar{1}.8484771$	$\bar{1}.8485584$	$\bar{1}.8485587$
h	44.52. 1.71	44.52.7.91	44.52. 3.60	44.52. 2.42	44.52.40.85	44.52.41.00
$d' h$	+19.29	+13.09	+17.40	18.58	—19.85	—20.00

ÉTOILES δ	α Lion 12.20.57.10	α Persée 49.34.58.66	α Orion 7.23.23.79	δ Lion 20.57. 7.93	δ Persée 47.32.15.76	ρ Lion 9.42.32.00
T + C_{pa}	7.32.53.906	7.48.38.449	7.53.26.647	8. 1. 1.337	8. 2.42.281	8.11.44.125
Retard	0.540	0.540	0.540	0.540	0.540	0.540
T + C_{pa} + Ret	7.32.54.446	7.48.38.989	7.53.27.187	8. 1. 1.877	8. 2.42.821	8.11.44.665
α	10. 4.12.331	3.18.41.448	5.50.55.079	11. 9.56.945	3.37.18.687	10.28.41.546
$\alpha - T - C_{pa} - \text{Ret}$	2.31.17.885	—4.29.57.541	—2. 2.32.108	3. 8.55.068	—4.25.24.134	2.16.56.881
$l \sin \Phi$	$\bar{1}.8395711$					
$l \sin \delta$	$\bar{1}.3301483$	$\bar{1}.8815818$	$\bar{1}.1093137$	$\bar{1}.5533842$	$\bar{1}.8678926$	$\bar{1}.2269665$
$l \sin \Phi \sin \delta$	$\bar{1}.1697194$	$\bar{1}.7211529$	$\bar{2}.9488848$	$\bar{1}.3929553$	$\bar{1}.7074637$	$\bar{1}.0665376$
$l \cos \Phi$	$\bar{1}.8589660$					
$l \cos \delta$	$\bar{1}.9898333$	$\bar{1}.8118071$	$\bar{1}.9963776$	$\bar{1}.9702907$	$\bar{1}.8293712$	$\bar{1}.9937348$
$l \cos (\alpha - T - C_{pa} - \text{Ret})$	$\bar{1}.8975680$	$\bar{1}.5830271$	$\bar{1}.9347215$	$\bar{1}.8319108$	$\bar{1}.6032955$	$\bar{1}.9173569$
lp	$\bar{1}.7463673$	$\bar{1}.2538002$	$\bar{1}.7900651$	$\bar{1}.6611675$	$\bar{1}.2916327$	$\bar{1}.7700577$
$\sin \Phi \sin \delta$	0.1478153	0.5262025	0.0888965	0.2471470	0.5098750	0.1165568
p	0.5576572	0.1793908	0.6166874	0.4583186	0.1957189	0.5889220
$\Sigma = \sin h$	0.7054725	0.7055933	0.7055839	0.7054656	0.7055939	0.7054788
$l \sin h$	$\bar{1}.8484801$	$\bar{1}.8485545$	$\bar{1}.8485487$	$\bar{1}.8484759$	$\bar{1}.8485548$	$\bar{1}.8484840$
h	44.52. 3.89	44.52.39.00	44.52.36.27	44.52. 1.85	44.52.39.15	44.52. 5.69
$d' h$	+17.11	—18.00	15.27	—19.15	—18.15	+15.31

TABLEAU VIII (suite)

ÉTOILES δ	α Cocher	β P Ourse	θ Cocher	λ Gémeaux	ζ Gémeaux	δ Gémeaux
	45.55.11.13	74.28.24.86	37.12.27.67	16.40.49.89	20.41.3.79	22.7.33.58
$T + C_{pa}$	9.32.34.151	9.38.9.644	9.54.25.303	10.5.8.573	10.7.16.979	10.28.402.45
Retard	0.540	0.540	0.540	0.540	0.540	0.540
$T + C_{pa} + \text{Ret}$	9.32.34.691	9.38.10.184	9.54.25.843	10.5.9.113	10.7.17.519	10.28.40.785
α	5.10.52.745	14.50.56.640	5.54.21.847	7.13.35.149	6.59.27.351	7.15.26.374
$\alpha - T - C_{pa} - \text{Ret}$	-4.21.41.946	5.12.46.456	-4.0.3.996	-2.51.33.964	-3.7.50.168	-3.13.14.411
$l \sin \Phi$	$\bar{1}.8395711$					
$l \sin \delta$	$\bar{1}.8563459$	$\bar{1}.9838549$	$\bar{1}.7815443$	$\bar{1}.4579347$	$\bar{1}.5480451$	$\bar{1}.5759317$
$l \sin \Phi \sin \delta$	$\bar{1}.6959170$	$\bar{1}.8234260$	$\bar{1}.6211154$	$\bar{1}.2975058$	$\bar{1}.3876162$	$\bar{1}.4155028$
$l \cos \Phi$	$\bar{1}.8589660$					
$l \cos \delta$	$\bar{1}.8424002$	$\bar{1}.4276205$	$\bar{1}.9011578$	$\bar{1}.9813293$	$\bar{1}.9710625$	$\bar{1}.9667788$
$l \cos (\alpha - T - C_{pa} - \text{Ret})$	$\bar{1}.6189759$	$\bar{1}.3109183$	$\bar{1}.6987513$	$\bar{1}.8648929$	$\bar{1}.8341161$	$\bar{1}.8228866$
$l p$	$\bar{1}.3203421$	$\bar{2}.5975048$	$\bar{1}.4588751$	$\bar{1}.7051882$	$\bar{1}.6641446$	$\bar{1}.6486314$
$\sin \Phi \sin \delta$	0.4964974	0.6659260	0.4179414	0.1983836	0.2441272	0.2603172
p	0.2090942	0.0395826	0.2876571	0.5072105	0.4614712	0.4452782
$\Sigma = \sin h$	0.7055916	0.7055086	0.7055985	0.7055931	0.7055984	0.7055954
$l \sin h$	$\bar{1}.8485534$	$\bar{1}.8485023$	$\bar{1}.8485577$	$\bar{1}.8485543$	$\bar{1}.8485576$	$\bar{1}.8485557$
h	44.52.38.49	44.52.14.34	44.52.40.52	44.52.38.90	44.52.40.48	44.52.39.58
$d' h$	-17.49	+6.66	-19.52	-17.90	-19.48	-18.58

ÉTOILES δ	ϵ Vierge	α Gémeaux	α Bouvier	β Gémeaux	δ Bouvier	σ Lion
	11.22.45.66	21.35.7.77	19.35.20.69	28.12.55.53	33.36.16.52	10.14.52.13
$T + C_{pa}$	10.32.2.298	11.1.41.827	11.8.26.249	11.14.29.959	11.22.7.208	11.56.55.975
Retard	0.540	0.540	0.540	0.540	0.540	0.540
$T + C_{pa} + \text{Ret}$	10.32.2.838	11.1.42.367	11.8.26.789	11.14.30.499	11.22.7.748	11.56.56.515
α	12.58.16.831	7.39.42.939	14.12.5.286	7.40.31.171	15.12.20.536	9.36.58.468
$\alpha - T - C_{pa} - \text{Ret}$	2.26.13.993	-3.21.59.428	3.3.38.497	-3.33.59.328	3.50.12.788	-2.19.58.047
$l \sin \Phi$	$\bar{1}.8395711$					
$l \sin \delta$	$\bar{1}.2951359$	$\bar{1}.6191461$	$\bar{1}.5253973$	$\bar{1}.6746663$	$\bar{1}.7430849$	$\bar{1}.2501906$
$l \sin \Phi \sin \delta$	$\bar{1}.1347070$	$\bar{1}.4587172$	$\bar{1}.3649684$	$\bar{1}.5142374$	$\bar{1}.5826560$	$\bar{1}.0897617$
$l \cos \Phi$	$\bar{1}.8589660$					
$l \cos \delta$	$\bar{1}.9913777$	$\bar{1}.9587270$	$\bar{1}.9741068$	$\bar{1}.9450628$	$\bar{1}.9205809$	$\bar{1}.9930160$
$l \cos (\alpha - T - C_{pa} - \text{Ret})$	$\bar{1}.9048514$	$\bar{1}.8035324$	$\bar{1}.8424734$	$\bar{1}.7744163$	$\bar{1}.7295819$	$\bar{1}.9134076$
$l p$	$\bar{1}.7551951$	$\bar{1}.6212254$	$\bar{1}.6755462$	$\bar{1}.5784451$	$\bar{1}.5091288$	$\bar{1}.7653896$
$\sin \Phi \sin \delta$	0.1363663	0.2875525	0.2317226	0.3267664	0.3825217	0.1229594
p	0.5691086	0.4180473	0.4737467	0.3788306	0.3229452	0.5826257
$\Sigma = \sin h$	0.7054749	0.7055998	0.7054693	0.7055970	0.7054669	0.7055851
$l \sin h$	$\bar{1}.8484816$	$\bar{1}.8485585$	$\bar{1}.8484782$	$\bar{1}.8485567$	$\bar{1}.8484767$	$\bar{1}.8485494$
h	44.52.4.55	44.52.40.85	44.52.2.94	44.52.40.05	44.52.2.23	44.52.36.60
$d' h$	-16.45	-19.85	+18.06	-19.05	+18.77	-15.60

TABLEAU IX. — Calcul de cos A et de sin A cos ϕ

ÉTOILES Position	ε Lion E	δ Hydre E	ψ G Ourse E	ζ Lion E	η Taureau W	β Persée W	α Lion E	α Persée W	α Omon W	δ Lion E	δ Persée W	ρ Lion E	α Cocher W
$l \sin \delta$	$\bar{1}.61159$	$\bar{1}.01745$	$\bar{1}.84890$	$\bar{1}.00601$	$\bar{1}.60694$	$\bar{1}.81390$	$\bar{1}.33015$	$\bar{1}.88158$	$\bar{1}.10982$	$\bar{1}.55338$	$\bar{1}.86789$	$\bar{1}.22697$	$\bar{1}.85635$
$\sin \delta$	0.48687	0.10410	0.70615	0.40365	0.40452	0.65148	0.21387	0.76134	0.12863	0.35758	0.73772	0.16864	0.71837
$\sin \phi \sin h$	$+0.07876$	-0.38353	$+0.21852$	-0.08398	-0.08311	$+0.16385$	-0.27376	$+0.27371$	-0.35900	-0.13005	-0.25009	-0.31899	$+0.23074$
Δ	$\bar{5}.83631$	$\bar{1}.58380$	$\bar{1}.33949$	$\bar{5}.92418$	$\bar{5}.91965$	$\bar{1}.21445$	$\bar{1}.43737$	$\bar{1}.43729$	$\bar{1}.55500$	$\bar{1}.11411$	$\bar{1}.39809$	$\bar{1}.50378$	$\bar{1}.36313$
$l \Delta$	$\bar{1}.70942$												
$l \cos \phi \cos h$	$\bar{1}.18689$	$\bar{1}.87438$	$\bar{1}.63007$	$\bar{1}.21476$	$\bar{1}.21023$	$\bar{1}.30503$	$\bar{1}.72795$	$\bar{1}.72787$	$\bar{1}.84567$	$\bar{1}.40469$	$\bar{1}.68867$	$\bar{1}.79436$	$\bar{1}.65371$
$l \cos \Delta$	$\bar{1}.99480$	$\bar{1}.82136$	$\bar{1}.95637$	$\bar{1}.99408$	$\bar{1}.99421$	$\bar{1}.97655$	$\bar{1}.92694$	$\bar{1}.92607$	$\bar{1}.85323$	$\bar{1}.98553$	$\bar{1}.94086$	$\bar{1}.89341$	$\bar{1}.95074$
$l \sin \Delta$													
$l \cos \phi$	$\bar{1}.85897$												
$l \sin \Delta \cos \phi$	$\bar{1}.85377$	$\bar{1}.68033$	$\bar{1}.81534$	$\bar{1}.85305$	$\bar{1}.85318$	$\bar{1}.83552$	$\bar{1}.78591$	$\bar{1}.78504$	$\bar{1}.71220$	$\bar{1}.84450$	$\bar{1}.79083$	$\bar{1}.75238$	$\bar{1}.80971$
$\cos \Delta$	-0.15378	$+0.74882$	0.42665	$+0.16397$	-0.16227	-0.31891	$+0.35450$	-0.53440	$+0.70092$	$+0.25392$	-0.48828	$+0.62281$	-0.45052
$\sin \Delta \cos \phi$	-0.71412	-0.47899	-0.65364	-0.71293	-0.71315	$+0.68473$	-0.61081	$+0.61086$	$+0.51547$	-0.69903	-0.63071	-0.56543	$+0.64323$

ÉTOILES Position	β P Ourse E	γ Cocher W	Δ Géméaux W	ε Géméaux W	δ Géméaux W	ε Vierge E	α Géméaux W	α Bouvier E	β Géméaux W	δ Bouvier E	γ Lion W
$l \sin \delta$	$\bar{1}.98385$	$\bar{1}.78154$	$\bar{1}.45793$	$\bar{1}.54805$	$\bar{1}.57593$	$\bar{1}.29514$	$\bar{1}.61915$	$\bar{1}.52540$	$\bar{1}.67466$	$\bar{1}.74308$	$\bar{1}.25019$
$\sin \delta$	0.96350	0.60470	0.28703	0.33322	0.37664	0.19730	0.41605	0.33528	0.47278	0.55345	0.17790
$\sin \phi \sin h$	0.48763	$+0.11707$	-0.20060	-0.13441	-0.11099	-0.28033	-0.07158	-0.15235	-0.01485	$+0.06582$	-0.30973
Δ	$+0.47587$	$\bar{1}.06345$	$\bar{1}.30233$	$\bar{1}.12843$	$\bar{1}.04528$	$\bar{1}.46290$	$\bar{5}.85379$	$\bar{1}.18284$	$\bar{5}.17173$	$\bar{5}.81836$	$\bar{1}.49008$
$l \Delta$	$\bar{1}.67749$										
$l \cos \phi \cos h$	$\bar{1}.70942$										
$l \cos \Delta$	$\bar{1}.96807$	$\bar{1}.35903$	$\bar{1}.59291$	$\bar{1}.41901$	$\bar{1}.33586$	$\bar{1}.76348$	$\bar{1}.14537$	$\bar{1}.47342$	$\bar{5}.46231$	$\bar{1}.10894$	$\bar{1}.78156$
$l \sin \Delta$	$\bar{1}.56706$	$\bar{1}.98835$	$\bar{1}.96384$	$\bar{1}.98451$	$\bar{1}.98935$	$\bar{1}.91583$	$\bar{1}.99572$	$\bar{1}.97988$	$\bar{1}.90982$	$\bar{1}.99638$	$\bar{1}.90115$
$l \cos \phi$	$\bar{1}.85897$										
$l \sin \Delta \cos \phi$	$\bar{1}.42693$	$\bar{1}.84732$	$\bar{1}.82281$	$\bar{1}.84348$	$\bar{1}.84852$	$\bar{1}.77480$	$\bar{1}.85469$	$\bar{1}.83885$	$\bar{1}.85879$	$\bar{1}.85585$	$\bar{1}.76012$
$\cos \Delta$	-0.92912	-0.22858	$+0.39166$	$+0.26243$	$+0.21670$	$+0.56086$	$+0.13975$	$+0.20745$	$+0.02899$	-0.12851	$+0.60473$
$\sin \Delta \cos \phi$	-0.26725	$+0.70358$	$+0.66498$	$+0.69740$	$+0.70553$	-0.59538	$+0.71563$	-0.68000	$+0.72242$	-0.71672	$+0.57560$

Nous avons pu, pour ces observations, supposer la latitude de l'instrument bien connue. Par suite, dans les équations

$$dh + d'h + \cos A \, d\Phi + \sin A \cos \Phi \, dCp = 0$$

le terme $\cos A \, d\Phi$ peut être regardé comme nul et le calcul de $\cos A$, que nous avons fait, à titre d'exemple, était, dans ce cas particulier, superflu.

Introduction de la réfraction. — Pour une étoile observée, on a, à une certaine heure origine τ_0

$$(dh)^0 = \text{hauteur vraie} - \text{hauteur approchée.}$$

A une autre heure τ_1 , la réfraction à la hauteur d'observation ayant varié de dR_1 on a

$$\begin{aligned} (dh)^1 &= \text{hauteur vraie au temps } \tau_0 \pm dR_1 - \text{hauteur approchée} \\ &= (dh)^0 \pm dR_1. \end{aligned}$$

Pour l'observation faite à l'heure τ_1 , on remplacera donc, dans la formule précédente, dh par $(dh)^0 \pm dR_1$.

Remarquons que la hauteur apparente de toutes les étoiles à l'instant de la coïncidence (si toutefois l'on admet l'invariabilité de l'angle du prisme) est la même.

Donc, si la réfraction croît, c'est que la hauteur vraie de l'étoile décroît, et dR a le signe $-$. Inversement si la réfraction décroît, dR a le signe $+$.

L'heure origine qui a été adoptée pour toutes les soirées est 21 h. 15 de temps moyen.

Pour la soirée du 10 mars, cette heure correspond à 9 h. 30 de temps sidéral. La température décroît du commencement à la fin de la soirée. La réfraction croît. Pour toutes les étoiles observées avant 9 h. 30, dR sera positif. Pour les autres, il sera négatif.

Le calcul de dR pourra être fait d'une façon presque immédiate en employant la table II de la Connaissance des Temps.

En adoptant les notations de ce recueil, on a

$$dR = d[R A \alpha + R B \beta] + \text{des termes très petits.}$$

Mais à la hauteur de 45° $\alpha = \beta = 1$.

dR est donc égal, au produit de R par la quantité dont a varié $(A + B)$ entre l'heure origine τ_0 et l'heure τ correspondant à l'observation considérée.

$$dR = R [(A + B)\tau - (A + B)\tau_0].$$

Marche de la pendule. — Pendant toute la période considérée, je connaissais d'une façon très parfaite la marche de la pendule, déterminée par les instruments méridiens, et par l'instrument des hauteurs égales lui-même.

Aussi dans la formule 25, j'ai regardé le terme en m comme connu. Ce terme est

$$d\mu = \sin A \cos \Phi m. (T_i - T_0).$$

Je l'ai calculé pour chaque étoile. J'ai posé

$$S = (d'h) + dR + d\mu.$$

Enfin nous avons dit que nous regardions la latitude comme bien connue

$$d\Phi = 0.$$

La relation 25 se simplifie donc et devient

$$dh + S + \sin A \cos \Phi dC_p = 0.$$

Nous aurons donc n équations entre 2 inconnus dh et dC_p . Nous les résoudrons par la méthode de Cauchy, ce qui sera ici particulièrement simple parce que le coefficient de dh est égal à l'unité.

Nous donnons ci-après le détail de la résolution de ces équations pour la soirée du 10 mars.'

TABLEAU X. — Calcul de Cp

ÉTOILES	θ	BARO	d/h	dR	$\sin A \cos \Phi$ $m(t-t_0)$	$t-t_0$	$m(t-t_0)$	S	$\sin A \cos \Phi$	Δ_1	Δ_2	$l \Delta_1$	$l \Delta_2$	$l \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$	$l dCp$	RÉSULT.
ε Lion.....	3.9	730.8	+19.29	+0.22	-0.50	-2.6	-0.70	+19.01	-0.71412	-21.56	+0.79250	1.33365	1.89900	1.43465	0.25856	-0 ^s 015
δ Hydre.....			+13.09	+21	-29	-2.3	-0.82	+13.01	-0.47899	-15.56	+0.55737	1.19201	1.74615	4.4586	.26977	+ 32
ψ G Orse.....			+17.40	+20	-38	-2.2	-0.59	+17.22	-0.65364	-19.77	+0.73202	1.29601	1.86452	4.3149	.801	+ 28
ζ Lion.....			+18.58	+20	-41	-2.1	-0.57	+18.37	-0.71293	-20.92	+0.79131	1.32056	1.98835	4.2221	.24612	- 67
η Taureau.....			+19.85	+19	-36	-1.9	-0.51	-19.30	+0.71315	+16.75	-0.63477	1.22401	1.80202	4.2139	.24530	- 70
β Persée.....	3.8	731.0	-20.00	+18	+31	-1.7	-0.46	-19.51	+0.68473	+16.96	-0.60635	1.22943	1.78273	4.4670	.27001	+ 36
α Lion.....			+17.11	+16	-23	-1.4	-0.38	+17.04	-0.61081	-19.59	+0.68919	1.29203	1.83834	4.5369	.27760	+ 66
α Persée.....			-18.00	+14	+18	-1.1	-0.30	+17.68	-0.61086	+15.13	-0.53248	1.17984	1.72630	4.5354	.27745	- 65
α Orion.....			-15.27	+13	+14	-1.0	-0.27	-15.00	+0.51547	+12.45	-0.43709	1.09317	1.64057	4.5460	.27851	+ 70
δ Lion.....			+19.15	+11	-16	-0.9	-0.24	+19.10	-0.69903	-21.65	+0.77741	1.33546	1.89065	4.4481	.26872	+ 28
δ Persée.....			-18.15	+11	+15	-0.5	-0.24	-17.89	+0.63071	+15.34	-0.55233	1.18583	1.74220	4.4363	.26754	+ 23
ρ Lion.....	3.5	731.1	+15.31	+10	-12	-0.8	-0.22	+15.29	-0.56543	-17.84	+0.64381	1.25139	1.80876	4.4263	.26654	+ 18
α Cocher.....			-17.49	-08	-10	+0.6	+0.16	-17.67	+0.64523	+15.12	-0.56685	1.17955	1.75347	4.2608	.24999	- 51
β P Orse.....			+6.66	-09	+05	+0.7	+0.19	+6.62	-0.26725	-9.17	+0.34563	0.96237	1.53861	4.2376	.24767	- 60
γ Cocher.....			-19.52	-13	-19	+1.0	+0.27	-19.84	+0.70358	+17.29	-0.62520	1.23779	1.79602	4.4177	.26568	+ 15
γ Gémeaux....			-17.90	-15	-20	+1.1	+0.30	-18.25	+0.66498	+15.70	-0.58660	1.19590	1.76834	4.2756	.25147	- 45
ζ Gémeaux....	2.2	731.0	-19.43	-16	-22	+1.2	+0.32	-19.86	+0.69740	+17.31	-0.61902	1.23830	1.79170	4.4660	.27051	+ 35
γ Gémeaux....			-18.58	-19	-29	+1.5	+0.41	-19.06	+0.70553	+16.51	-0.62715	1.21775	1.79738	4.2037	.24428	- 74
ε Vierge.....			+16.45	-19	+26	+1.6	+0.43	+16.52	-0.59538	-19.07	+0.67376	1.28035	1.82851	4.5184	.27375	- 58
α Gémeaux....	2.1	730.9	-19.85	-20	-41	+2.1	+0.57	-20.46	+0.71563	+17.91	-0.63725	1.25310	1.80431	4.4879	.27270	+ 45
α Bouvier.....			+18.06	-22	+40	+2.2	+0.59	+18.24	-0.69000	-20.79	+0.70838	1.31785	1.88558	4.3227	.25618	- 25
β Gémeaux....			-19.05	-23	-45	+2.3	+0.62	-19.73	+0.72242	+17.18	-0.64404	1.25502	1.80892	4.2610	.25001	- 51
δ Bouvier.....			+18.77	-25	+46	+2.4	+0.65	+18.98	-0.71672	-21.53	+0.79510	1.33304	1.90042	4.3262	.25653	- 24
ρ Lion.....	1.5	730.7	-15.60	-32	-46	+3.0	+0.81	-16.38	+0.57560	+13.83	-0.49722	1.14082	1.69655	4.4427	.26818	+ 25
								-2.55	+0.07838						1.829	

Cp conclu : = - 58^s 171

Dans le tableau précédent, les quantités Δ_1 et Δ_2 représentent les écarts des valeurs individuelles de S et de $\sin A \cos \Phi$ à leur valeur moyenne pendant la soirée. Le rapport $\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ est égal à l'inconnu dCp exprimé en arc. Aussi, pour obtenir les valeurs de $\log dCp$ (16^e colonne) a-t-on simplement retranché $\log 15$ de $\log \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$.

La correction de pendule conclue est égale à la correction de pendule approchée adoptée (ici — 1 minute) plus dCp .

En définitive on obtient pour chaque étoile une valeur de la correction de pendule à 21 h. 15 de temps moyen. Donc la comparaison de tous ces résultats individuels ne peut en aucune façon permettre de conclure la marche de la pendule puisque celle-ci a été introduite dans nos calculs comme une quantité connue et puisque, grâce à cela, les Cp sont tous rapportés à la même heure.

Enfin ces résultats individuels ne sont pas indépendants les uns des autres. Une erreur, relative au Cp d'une étoile a sa répercussion sur tous les autres Cp .

Aussi, si l'on a la certitude qu'un cliché est mauvais, soit parce que les images sont empâtées, soit parce qu'elles sont floues, ou trop faibles, ou nettement déformées, ou pour tout autre motif susceptible de contrôle, on ne devra avoir aucun scrupule à éliminer l'étoile.

Ici en effet, la position de la question n'est pas la même que pour un instrument visuel. Dans un instrument méridien par exemple, il ne reste pas de trace de ce qu'a vu l'observateur, et celui-ci se fait presque toujours un devoir de conserver toutes ses observations, même celles qui lui donnent des résultats visiblement médiocres. Ici les clichés restent et l'on peut à tout instant les examiner à nouveau.

Nous conseillons d'éliminer avant de faire les mesures tous les clichés qui ne sont pas vraiment très bons, et de les rejeter sans les mesurer. On sera ainsi à l'abri de toute critique.

L'ensemble des résultats obtenus dans toute la période d'observation considérée peut être résumé dans le tableau suivant :

TABLEAU XI

26 FÉVRIER				28 FÉVRIER				1 ^{er} MARS				2 MARS			
ÉTOILES		C _p	Résidus	ÉTOILES		C _p	Résidus	ÉTOILES		C _p	Résidus	ÉTOILES		C _p	Résidus
α Ch de Chasse		—53.361	—0.018	α G Ourse.....		—53.923	—0.024	λ G Ourse.....		—54.188	+0.018	α Persée.....		—54.509	+0.030
β Taureau.....		327	+ 16	β Persée.....		—54.023	— 124	α G Ourse.....		254	— 48	γ Persée.....		539	0
β Lion.....		342	+ 1	α Persée.....		—53.949	— 50	δ Cassiopée.....		186	+ 20	δ Lion.....		502	+ 37
γ G Ourse.....		323	+ 20	δ Lion.....		—53.829	+ 70	ε Lion.....		304	— 98	α Ch de Chasse		597	— 58
γ Gémeaux.....		389	— 56	ι Cocher.....		—53.803	+ 96	ε Taureau.....		181	+ 25	β Taureau.....		536	+ 3
α Cocher.....		358	— 15	α Ch de Chasse		—53.916	— 17	π Orion.....		275	— 69	β Lion.....		537	+ 2
β Cocher.....		290	+ 53	γ Gémeaux.....		—53.967	— 68	ψ G Ourse.....		192	+ 14	γ G Ourse.....		509	+ 30
α Bouvier.....		345	— 2	α Cocher.....		—53.851	+ 48	ζ Lion.....		240	— 34	γ Gémeaux.....		561	— 22
				α Bouvier.....		—53.925	— 26	η Taureau.....		287	— 81	α Cocher.....		536	+ 3
				β Gémeaux.....		—53.802	+ 97	27 Taureau.....		260	— 54	ο Cocher.....		583	— 44
						—53.899		α Taureau.....		134	+ 72	δ Gémeaux.....		506	+ 33
								α Lion.....		194	+ 12	ε Vierge.....		555	— 16
								α Persée.....		166	+ 40	θ Gémeaux.....		539	0
								α Orion.....		123	+ 83	η Bouvier.....		536	+ 3
								δ Lion.....		073	+ 133				
								ε G Ourse.....		210	— 4			—54.539	
								α Ch de Chasse		204	+ 2				
								β Taureau.....		248	— 42				
								β Lion.....		177	+ 29				
								α Cocher.....		184	+ 22				
								θ Cocher.....		253	— 47				
								δ Gémeaux.....		135	+ 71				
								ε Vierge.....		272	— 66				
										—54.206					

TABLEAU XI (suite)

10 MARS			16 MARS			17 MARS			18 MARS		
ÉTOILES	Cp	Résidus	ÉTOILES	Cp	Résidus	ÉTOILES	Cp	Résidus	ÉTOILES	Cp	Résidus
ε Lion.....	-58.186	-0° 015	ψ G Ourse.....	-60.334	-0.023	η Taureau.....	-60.629	+ 0.007	27 Taureau.....	-61.050	-0.030
δ Hydre.....	139	+ 32	η Taureau.....	330	- 19	27 Taureau.....	659	- 23	β Persée.....	-61.077	- 57
ψ G Ourse.....	199	- 28	α Lion.....	335	- 24	β Persée.....	634	+ 2	α Taureau.....	-60.966	+ 54
ζ Lion.....	238	- 67	α Pers ⁽⁶⁾	302	+ 9	α Lion.....	657	- 21	α Lion.....	-61.023	+ 3
η Taureau.....	241	- 70	α Orion.....	297	+ 14	α Persée.....	624	+ 12	α Persée.....	-60.946	+ 74
β Persée.....	135	+ 36	δ Lion.....	302	+ 9	δ Lion.....	634	+ 2	α Orion.....	-61.060	- 40
α Lion.....	105	+ 66	ε G Ourse.....	295	+ 16	β Lion.....	656	- 20	δ Lion.....	-61.014	+ 6
α Persée.....	106	+ 65	β Taureau.....	274	- 37	ε Vierge.....	568	+ 68	ε G Ourse.....	-61.024	- 4
α Orion.....	101	+ 70	β Lion.....	340	- 29	η Bouvier.....	606	+ 30			
δ Lion.....	143	+ 28	α Cocher.....	335	- 24	α Bouvier.....	688	- 52			
δ Persée.....	148	+ 23	θ Cocher.....	326	- 15						
ρ Lion.....	153	+ 18	α Bouvier.....	259	+ 52						
α Cocher.....	222	- 51									
β P Ourse.....	231	- 60									
θ Cocher.....	156	+ 15									
λ Gémeaux.....	216	- 45									
ζ Gémeaux.....	136	+ 35									
δ Gémeaux.....	245	- 74									
ε Vierge.....	113	+ 58									
α Gémeaux.....	126	+ 45									
α Bouvier.....	196	- 25									
β Gémeaux.....	222	- 51									
δ Bouvier.....	195	- 24									
γ Lion.....	146	+ 25									
	-58.171										

Cp à 19^h50 : -61.020
à 21^h15 : -61.044

CHAPITRE V

DISCUSSION DES RÉSULTATS. — CAUSES D'ERREUR

Le tableau précédent montre que l'écart moyen des C_p individuels à la moyenne des C_p de chaque soirée est inférieur à $0^s, 05$. Cet écart dépasse très rarement $0^s, 10$.

Nous avons dit que, par suite de la méthode de réduction employée, une erreur commise sur l'heure de coïncidence d'une étoile entraîne une erreur, non seulement sur le C_p relatif à cette étoile, mais aussi sur tous les autres C_p . Dans les observations méridiennes, chaque étoile observée donne une valeur de la correction de pendule, en apparence indépendante de celles données par les autres étoiles. On pourrait être tenté de croire que l'instrument des hauteurs égales est à cet égard d'un emploi moins avantageux que l'instrument méridien. Mais si, avec ce dernier, on est conduit à résoudre, pour chaque étoile, une équation à une seule inconnue C_p , c'est qu'on a pu, par des procédés astronomiques ou physiques, déterminer les autres quantités inconnues qui sont les constantes de l'instrument. Or c'est justement la détermination de ces constantes qui peut laisser subsister sur les résultats obtenus une incertitude.

Il résulte pourtant de la remarque que nous venons de faire, que, pour les observations faites avec notre instrument, il n'y a pas lieu, en toute rigueur, de comparer entre eux les résidus donnés par une même étoile en plusieurs soirées consécutives en vue d'en déduire des corrections de l'éphéméride de cette étoile, ou une loi quelconque de répartition de ces résidus suivant sa grandeur. Il aurait d'ailleurs fallu, pour pouvoir le faire, prendre des précautions qui n'ont pas été prises ici, par exemple observer tous les soirs les mêmes étoiles, et employer chaque fois des plaques de même sensibilité.

L'examen des résidus d'une même soirée montre qu'ils sont du même ordre de grandeur que ceux que l'on obtient dans les observations faites avec les petits instruments méridiens de longitude.

Comparons maintenant entre elles les différentes soirées. J'ai rapporté

dans ce but tous mes résultats à la pendule directrice de l'Observatoire de Paris. Depuis longtemps le directeur de cet établissement pense qu'elle a une marche extrêmement régulière, et à son avis, l'examen des valeurs de cette dernière déduites de mes clichés, doit le plus sûrement donner la mesure de la valeur de l'instrument.

J'ai pu comparer chaque soir les pendules des observatoires de Nice et de Paris grâce à l'enregistrement simultanément des signaux de T. S. F. dans ces deux stations : soient T_1 l'heure marquée par la pendule Fénou de Nice au moment de la réception d'un signal, C_p la correction de cette pendule, déterminée avec l'instrument des hauteurs égales : $T_1 + C_p$ est l'heure véritable à Nice à cet instant.

Soit T_2 l'heure marquée au même moment par la pendule de Paris. La différence $T_1 + C_p - T_2$ est égale à la différence de longitude de Paris-Nice + la correction de la pendule directrice de l'Observatoire de Paris. Les résultats obtenus sont groupés dans le tableau suivant :

TABLEAU XII

DATES	$\Delta L + C_p \text{ Paris}$	DIFFÉRENCE	MARCHE	RÉSIDU
			sec.	sec.
26 février.....	^m 27 ^s .540			
2 mars.....	26.097	1.443	0.361	-0.004
5 —	24.995	1.102	.367	— 2
7 —	24.311	0.684	.342	— 23
8 —	23.961	0.350	.350	— 15
9 —	23.573	0.388	.388	+ 23
10 —	23.209	0.364	.364	— 1
17 —	20.691	2.518	.360	5
18 —	20.304	0.387	.387	— 22
Marche moyenne : 0.365				

Les 28 février, 1^{er} et 16 mars, les signaux n'ont pas pu être enregistrés simultanément dans les deux stations :

Dans la quatrième colonne se trouve la marche de la pendule directrice de l'Observatoire de Paris, déduite des résultats obtenus pendant les neuf autres soirées. Si l'on juge satisfaisante la concordance des nombres de cette colonne, on peut conclure que les erreurs accidentelles sont suffisamment éliminées. Mais cette concordance ne permet en aucun cas de se prononcer sur l'élimination des erreurs systématiques.

Il est intéressant de comparer les corrections de la pendule Fénou de Nice, déterminées avec l'instrument des hauteurs égales, à celles

déterminées simultanément par M. Fayet avec l'instrument méridien de Gautier. J'ai employé dans mes calculs, pour les étoiles observées les positions données par la connaissance des Temps. M. Fayet ayant rapporté ses observations au catalogue de Boss, j'ai rendu mes résultats comparables aux siens en les rapportant au même système. Les Cp conclus n'en sont jamais modifiés de plus d' $\frac{1}{100}$ de seconde. De plus, je tiens compte de l'observation diurne en appliquant au résultat de chaque soirée une ~~modification~~ ^{correction} de $+ 0^s01$ (Claude et Driencourt : *Description et usage de l'astrolabe*, p. 122. — Angle du prisme 45°)

TABLEAU XIII

DATES	Cp Inst. H. E.	Cp Inst. Mer.	DIFFÉRENCE
	sec.	sec.	sec.
26 février.....	—53.34	—53.45	+0.11
28 —	—53.88	—53.95	7
1 ^{er} mars.....	—54.20	—54.28	8
2 —	—54.52	—54.62	10
5 —	—55.81	—55.90	9
7 —	—56.76	—56.85	9
8 —	—57.22	—57.33	11
9 —	—57.74	—57.81	7
10 —	—58.16	—58.26	10
Moyenne : +0.09			

On n'a conservé, dans ce tableau, que le chiffre des $\frac{1}{100}$ de seconde.

On n'a pas observé avec l'instrument méridien les 16, 17 et 18 mars.

La différence de longitude des deux instruments est environ 0^s02 (instrument méridien à l'ouest). Si l'on en tient compte, il subsiste entre les résultats un écart systématique d'environ 0^s07 .

On peut donc affirmer qu'il existe une cause d'erreur systématique soit pour l'un, soit pour l'autre instrument, soit pour les deux.

La question des erreurs systématiques des instruments méridiens n'est pas celle dont je dois m'occuper ici. Par contre, nous allons examiner quelles sont les erreurs systématiques que l'on peut avoir à redouter avec l'instrument photographique des Hauteurs égales.

Les erreurs commises sur la mesure des clichés sont certainement accidentelles. Il ne s'agit là que de mesures différentielles faites sur les points correspondants des deux trajectoires directe et réfléchie : les erreurs systématiques s'éliminent.

Accidentelles aussi sont les erreurs dues aux variations de l'angle du prisme et de la réfraction. Si ces variations ont une allure systématique, elles ont pour effet de relever ou d'abaisser la hauteur du cercle d'observation, mais on peut l'admettre, dans le même sens et de la même quantité à l'est et à l'ouest : le C_p conclu n'est pas modifié.

Nous reviendrons sur la question de l'influence de la réfraction, sur laquelle il convient de faire quelques réserves. En tous cas, les causes d'erreur dues à la réfraction, sont plutôt imputables à l'atmosphère qu'à l'instrument, et, si ce sont des causes d'erreurs systématiques, nous nous permettrons du moins d'établir une distinction entre elles et les erreurs systématiques purement instrumentales, sans d'ailleurs pour cela préjuger en rien de l'importance des unes et des autres.

Les erreurs commises sur la mesure des retards d'ouverture et de fermeture du volet peuvent aussi être regardées comme accidentelles.

Quand on examine un cliché, on est frappé par ce fait que les traits successifs qui constituent les trajectoires sont plus longs que les intervalles qui les séparent. C'est que l'effet chimique de la lumière se propage aux grains du cliché voisins du grain impressionné, ce qui a pour effet d'allonger les traits dans les deux sens : avant l'ouverture, et après la fermeture du volet. De même, il n'est pas certain que l'action de la lumière sur la plaque soit instantanée. La plaque pourrait donc ne commencer à être impressionnée qu'un certain temps après l'ouverture du volet. Il est permis de douter qu'un tel retard soit appréciable. Mais, même si on l'admet, on ne voit pas pourquoi, si le premier grain frappé par le faisceau lumineux n'est pas impressionné, le dernier grain le serait. Or ce n'est ni le commencement ni la fin d'un trait, mais bien le milieu de ce trait que l'on pointe sous le fil de la machine de mesure. Plus exactement, on encadre le trait tout entier entre une couple de fils parallèles du réticule. Si donc les effets dont nous venons de parler se produisent symétriquement par rapport au milieu du trait, ils ne peuvent produire des erreurs systématiques. Si chaque image (directe et réfléchiée) était formée par la totalité de l'objectif, une telle symétrie ne pourrait, pensons-nous, être mise en doute. Malheureusement chacune n'est formée que par la moitié de l'objectif, et, par suite, elles ne sont pas rondes. Elles sont d'ailleurs plus ou moins larges suivant la grandeur de l'étoile, et suivant la sensibilité de la plaque. Aussi est-il à craindre, que, pour une étoile plus brillante, la coïncidence ait lieu plus tôt ou plus tard qu'elle n'aurait eu lieu si l'étoile avait été plus faible. L'heure de la coïncidence déduite de la mesure du cliché et le C_p

en seront évidemment affectés. Nous appellerons cette cause d'erreur : équation de grandeur.

Remarquons que la vitesse verticale des images varie avec la déclinaison de l'étoile observée. On peut donc dire que, s'il y a équation de grandeur, l'erreur qui en résulte pour l'heure de coïncidence est fonction de la grandeur de l'étoile observée, de sa déclinaison, et de la sensibilité de la plaque.

Quel sera l'effet de cette cause d'erreur sur le C_p déduit de l'ensemble des clichés de la soirée ?

Pour répondre à cette question nous nous placerons d'abord dans un cas particulier : supposons que l'on observe une même étoile lors de ses deux passages au même cercle de hauteur, d'abord à l'est, puis à l'ouest. Ces deux observations fournissent deux équations à deux inconnues dh et dC_p . Elles suffisent à déterminer la correction de pendule. La réduction peut d'ailleurs, dans ce cas, se simplifier beaucoup, car, aux petites corrections près relatives aux variations de la réfraction dans l'intervalle des deux observations, on peut dire que l'heure du passage de l'étoile au méridien est égale à la moyenne des heures des deux coïncidences. Les deux observations se rapportent à la même étoile. Sa grandeur et sa déclinaison sont évidemment les mêmes dans les deux cas ; on a pu en outre, employer deux plaques de même sensibilité, ou même se servir de la même plaque. Si donc, il y a équation de grandeur, elle sera la même, en valeur absolue, pour les deux observations.

Soient maintenant 1 et 2 les deux clichés obtenus ainsi à l'est et à l'ouest. Sur la figure, on a désigné par des flèches le sens du mouvement des images sur les deux trajectoires directe et réfléchie D et R. Dans les deux cas, les deux images vont de la gauche vers la droite pour les étoiles voisines du premier vertical. Pour le passage est l'image directe vient du bas, l'image réfléchie du haut du cliché ; l'inverse a lieu pour le passage ouest.

Si, par suite de l'équation de grandeur, les points de la trajectoire directe sont relevés ou rabaissés sur un cliché, ils seront relevés ou rabaissés sur l'autre, d'après ce que nous avons dit, de la même quantité et dans le même sens, parce qu'il n'y a aucune raison pour qu'il en soit différemment. Il en est de même des points des trajectoires réfléchies. Mais si, sur les trajectoires directes les images sont relevées, sur les trajectoires réfléchies elles sont rabaissées et inversement. Il en est ainsi à cause de la forme et de la position relative des deux faisceaux lumineux qui forment les images.

Considérons, sur le cliché 1 un point a de la trajectoire directe, et le point correspondant a' de la trajectoire réfléchie. Admettons que, par suite de l'équation de grandeur la distance verticale de ces deux points soit trop faible d'une quantité γ , le point a étant vu trop haut et le point a' trop bas. Soit $\frac{d(z-z')}{dt}$ la quantité dont varie la distance verticale des images pendant l'unité de temps, à cause du mouvement de l'étoile. Les deux images arriveront en coïncidence $\gamma : \frac{d(z-z')}{dt}$ secondes trop tôt.

Soient d'autre part, sur le cliché 2, deux points correspondants b et b' . Ici le point b (image directe) est encore vu trop haut et le point b' (image réfléchie) est vu trop bas, mais les positions relatives des deux

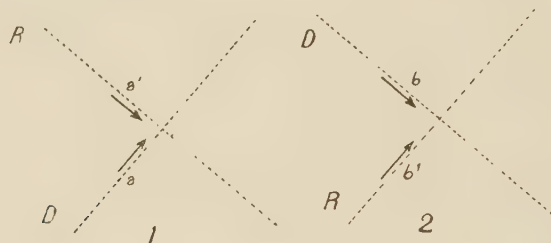


Fig. 19.

traînéees sont interverties. La distance verticale de ces deux points est, par suite de l'équation de grandeur, trop forte de la même quantité γ que précédemment, et la coïncidence a lieu $\gamma : \frac{d(z-z')}{dt}$ secondes trop tard : si l'heure conclue pour la coïncidence à l'est est trop faible, elle est trop forte à l'ouest de la même quantité. Le C_p conclu n'est donc pas, dans le cas particulier que nous venons d'examiner, affecté par l'équation de grandeur.

Plaçons-nous maintenant dans le cas général, et admettons que l'on ait fait un assez grand nombre d'observations d'étoiles de grandeurs analogues, réparties, à l'est et à l'ouest, à peu près en nombre égal, en des azimuts voisins : le C_p final pourra être regardé comme n'étant pas affecté par l'équation de grandeur. Si pourtant une telle erreur subsiste, elle n'offre pas un caractère vraiment systématique, puisqu'on peut, à volonté, en diminuer l'importance en multipliant le nombre des obser-

vations, et puisqu'on peut en changer la valeur en n'observant pas les mêmes étoiles, et en utilisant des plaques de sensibilité différente.

De ce que nous venons de dire, la conclusion qui semble s'imposer est que l'on aurait le plus grand intérêt à observer chaque étoile à ses deux passages est et ouest. On se débarrasserait ainsi plus sûrement des causes d'erreur les plus graves. J'ai voulu faire un tel essai afin de me rendre compte si les C_p conclus offriraient une concordance intéressante.

J'ai fait cette expérience à Nice. L'angle du prisme étant de 45° il a fallu attendre plus de huit heures entre les deux passages d'une même étoile. La durée d'une série d'observations atteignait douze heures.

Soit T l'heure que marque la pendule au moment de la coïncidence d'une étoile à l'est (heure de son passage à une certaine hauteur h_0). Soit T_w l'heure marquée par la pendule au moment de la coïncidence de la même étoile à l'ouest (heure de son passage à une hauteur $h_0 + dR$, dR désignant la quantité dont varie la réfraction à la hauteur de 45° dans l'intervalle des deux passages).

L'heure à laquelle l'étoile passe, à l'ouest, à la hauteur h_0 est

$$T_w + \frac{dR}{g_1}$$

dR est exprimé en radian.

L'heure du passage au méridien est

$$T_M = \frac{T_E + T_w}{2} + \frac{dR}{2g_1}$$

Soit α la déclinaison de l'étoile. On a

$$C_p = \alpha - T_M.$$

La réduction des observations est presque immédiate, ce qui compense l'ennui d'être obligé d'attendre très longtemps pour observer les étoiles à leurs deux passages. Par contre cette façon de procéder suppose que la marche de la pendule est régulière entre les deux passages : on ne peut compter sur cette régularité que pour de très bonnes pendules. Elle suppose de plus l'angle du prisme invariable.

[illegible][illegible]

On a pu observer ainsi les 8, 21 et 31 décembre 1921. Malheureusement, les séries d'observations étant longues, le temps n'a été pour aucune d'elles absolument beau depuis le début jusqu'à la fin. Des nuages passagers ont été cause que telle étoile observée à l'est n'a pu l'être à l'ouest. Un coup de vent plissant la surface du mercure a rendu inutilisable tel cliché relatif à une étoile passage est, alors que pour le passage ouest les trainées étaient bonnes. Il reste finalement sept ou huit étoiles par soirée prises des deux côtés. Ce nombre suffit d'ailleurs largement et permet une bonne détermination de l'heure.

Dans les trois tableaux XIV, les résidus ε sont faibles. Ils ne dépassent guère 0^s04, ce qui paraît être un progrès notable par rapport à ce qui avait été obtenu pendant l'opération de longitude. On pourra pourtant objecter que chacun des résidus se rapporte à la combinaison de deux observations, et qu'il est donc naturel qu'ils soient en moyenne plus faibles que ceux qui se rapportent à une seule observation. Aussi les résultats précédents ne présenteraient-ils qu'un faible intérêt s'ils ne permettaient pas de mettre en évidence l'existence de ce que nous avons convenu d'appeler l'équation de grandeur, et de nous rendre compte qu'elle a bien pour effet de relever ou d'abaisser la hauteur du petit cercle d'observation de la même quantité à l'est et à l'ouest.

Dans ce but, nous avons corrigé chacune des heures T_E et T_W de ces tableaux de la correction de pendule calculée, et de la marche de la pendule ; nous avons obtenu ainsi les heures vraies de coïncidence des images pour les deux passages. Nous avons pu calculer alors la hauteur vraie de l'étoile à l'instant de la coïncidence, et, tenant compte de la réfraction, en déduire la hauteur apparente de l'étoile. Nous donnons ci-après le détail de ces calculs.

TABLEAU XV

C_p à 5 h 0 : + 8^s 08Marche horaire : — 0^s 016

8 DÉCEMBRE

ÉTOILES	α Baleine E	α Baleine W	η Taureau E	η Taureau W	ζ Persée E	ζ Persée W	α Cocher E
T + C _p α	1.23. 6.28 2.58.13.21 1.35. 6.93	4.33.20.14 2.58.13.21 1.35. 6.93	0.23.21.14 3.42.52.24 3.19.31.10	7. 2.23.28 3.42.52.24 3.19.31.04	0. 4.43.08 3.49.15.23 3.44.32.15	7.33.47.31 3.49.15.23 3.44.32.08	0.49.13.80 5.10.57.60 4.21.43.80
α — T — C _p							
cos Φ cos δ cos (α — T — C _p)	0.6599195	0.6599195	0.4258984	0.4259006	0.3428261	0.3428314	0.2090390
sin Φ sin δ	0.0456064	0.0456064	0.2796179	0.2796179	0.3626906	0.3626906	0.4964833
Σ = sin h	0.7055259	0.7055259	0.7055163	0.7055185	0.7055167	0.7055220	0.7055223
h vraie	44.52.19.36	44.52.19.36	44.52.16.55	44.52.17.19	44.52.16.68	44.52.18.19	44.52.18.29
Réfraction : R (A+B)	3.88	3.94	3.91	4.18	3.91	4.18	3.88
h apparente	44.52.15.48	44.52.15.42	44.52.12.64	44.52.13.01	44.52.12.77	44.52.14.01	44.52.14.41

ÉTOILES	α Cocher W	β Taureau E	β Taureau W	γ Gémeaux E	γ Gémeaux W	β Gémeaux E	β Gémeaux W
T + C _p α	9.32.41.41 5.10.57.60 4.21.43.81	1.46.20.07 5.21.23.24 3.35. 3.17	8.56.26.41 5.21.23.24 3.35. 3.17	3.42.33.96 6.33.13.74 2.50.39.78	9.23.53.47 6.33.13.74 2.50.39.73	3. 6.33.09 7.40.33.88 3.34. 0.77	11.14.34.65 7.40.33.88 3.34. 0.77
α — T — C _p							
cos Φ cos δ cos (α — T — C _p)	0.2090387	0.3752972	0.3752972	0.5093343	0.5093366	0.3787876	0.3787883
sin Φ sin δ	0.4964833	0.3302185	0.3302185	0.1958847	0.1958847	0.3267325	0.3267325
Σ = sin h	0.7055220	0.7055157	0.7055157	0.7055185	0.7055213	0.7055201	0.7055208
h vraie	44.52.18.19	44.52.16.41	44.52.16.41	44.52.17.48	44.52.18.00	44.52.17.66	44.52.17.86
Réfraction : R (A+B)	4.29	3.90	4.34	3.96	4.28	3.96	4.31
h apparente	44.52.13.90	12.51	12.07	13.52	13.72	13.70	13.55

TABLEAU XV (suite)

C_p à 5^h 0 = + 2^s 99Marche horaire : — 0^s 017

ÉTOILES	ξ Taureau E	ξ Taureau W	λ Taureau E	λ Taureau W	α Cocher E	α Cocher W	β Taureau E
T + C _p	1. 7.29.10	5.38.26.33	1.25.30.85	6.27.14.85	0.49.13.83	9.32.41.78	1.46.20.26
α	3.22.57.70	3.22.57.70	3.56.22.87	3.56.22.87	5.10.57.76	5.10.57.76	5.21.23.40
α — T — C _p	2.15.28.60	2.15.28.63	2.30.52.02	2.30.51.98	4.21.43.93	4.21.44.02	3.35. 3.14
cos Φ cos δ cos (α — T — C _p)	0.5919166	0.5919156	0.5586401	0.5586414	0.2090328	0.2090298	0.3752979
sin Φ sin δ	0.1135902	0.1135902	0.1468764	0.1468764	0.4964876	0.4964876	0.3302204
Σ = sin h	0.7055088	0.7055058	0.7055165	0.7055178	0.7055204	0.7055174	0.7055183
h vraie	44.52.13.81	44.52.13.52	44.52.16.64	44.52.17.00	44.52.17.71	44.52.16.86	4.52.17.14
Réfraction : R (A + B)	3.38	3.12	3.38	3.12	3.38	3.11	3.34
h apparente	44.52.10.43	10.40	13.26	13.88	14.33	13.75	13.80

ÉTOILES	β Taureau W	θ Cocher E	θ Cocher W	γ Gémeaux E	γ Gémeaux W	δ Gémeaux E	δ Gémeaux W
T + C _p	8.56.26.52	1.54.20.16	9.54.32.13	3.42.34.17	9.23.53.74	4. 2.13.40	10.28.45.74
α	5.21.23.40	5.54.26.10	5.54.26.10	6.33.13.97	6.33.13.97	7.15.29.53	7.13.29.53
α — T — C _p	3.35. 3.12	4. 0. 5.94	4. 0. 6.03	2.50.39.80	2.50.39.77	3.13.16.13	3.13.16.21
cos Φ cos δ cos (α — T — C _p)	0.3752985	0.2875933	0.2875901	0.5096347	0.5096358	0.4452222	0.4452193
sin Φ sin δ	0.3302204	0.4179247	0.4179247	0.1958821	0.1958821	0.2602939	0.2602939
Σ = sin h	0.7055189	0.7055180	0.7055148	0.7055168	0.7055179	0.7055161	0.7055182
h vraie	44.52.17.29	44.52.17.05	16.14	16.68	17.00	16.50	15.66
Réfraction : R (A + B)	3.10	3.34	3.11	3.16	3.11	3.20	3.14
h apparente	14.19	13.71	13.03	13.52	13.89	13.30	12.52

ÉTOILES	ζ Persée E	ζ Persée W	λ Taureau E	λ Taureau W	α Taureau E	α Taureau W	α Cocher E	α Cocher W	β Taureau E
$T + C_p$ α	0. 4. 43. 01 3. 49. 15. 23 3. 44. 32. 22	7. 33. 47. 52 3. 49. 15. 23 3. 44. 32. 29	1. 25. 30. 95 3. 56. 22. 86 2. 30. 51. 91	6. 27. 14. 91 3. 56. 22. 86 2. 30. 52. 05	1. 41. 17. 95 4. 31. 28. 16 2. 50. 10. 21	7. 21. 38. 46 4. 31. 28. 16 2. 50. 10. 30	0. 49. 13. 81 5. 10. 57. 82 4. 21. 44. 01	0. 32. 41. 89 5. 10. 57. 82 4. 21. 44. 07	1. 46. 20. 38 5. 21. 23. 47 3. 35. 3. 09
$\alpha - T - C_p$									
$\cos \Phi \cos \delta \cos$ ($\alpha - T - C_p$)	0. 3428221	0. 3428196	0. 5586440	0. 5586413	0. 5109392	0. 5109361	0. 2090286	0. 2090287	0. 3753023
$\sin \Phi \sin \delta$	0. 3626945	0. 3626945	0. 1408749	0. 1468749	0. 1945825	0. 1945825	0. 4964909	0. 4964909	0. 3302211
$\Sigma = \sin h$	0. 7055166	0. 7055141	0. 7055189	0. 7055162	0. 7055217	0. 7055186	0. 7055193	0. 7055193	0. 7055234
h vraie	44. 32. 16. 64	15. 95	17. 29	16. 55	18. 14	17. 19	17. 13	17. 52	18. 62
Réfraction : R (A+B)	3. 91	3. 23	3. 54	3. 20	3. 50	3. 26	3. 64	2. 86	3. 49
h apparente	12. 3	12. 72	13. 75	13. 35	14. 64	13. 93	13. 84	14. 66	15. 13

ÉTOILES	β Taureau W	β Cocher E	β Cocher W	θ Cocher E	θ Cocher W	γ Gémeaux E	γ Gémeaux W	β Gémeaux E	β Gémeaux W
$T + C_p$ α	8. 56. 26. 63 5. 21. 23. 47 3. 35. 3. 16	1. 34. 24. 08 5. 53. 50. 78 4. 19. 26. 70	10. 13. 17. 48 5. 53. 50. 78 4. 19. 26. 70	1. 54. 20. 25 5. 54. 26. 21 4. 0. 5. 96	9. 54. 32. 15 5. 54. 26. 21 4. 0. 5. 94	3. 42. 34. 40 6. 33. 14. 1 2. 50. 39. 71	9. 23. 53. 79 6. 33. 14. 10 2. 50. 39. 69	4. 6. 33. 65 7. 40. 34. 43 3. 34. 0. 78	11. 14. 35. 26 7. 40. 34. 43 3. 34. 0. 83
$\alpha - T - C_p$									
$\cos \Phi \cos \delta \cos$ ($\alpha - T - C_p$)	0. 3752966	0. 2173252	0. 2173252	0. 2375903	0. 2375904	0. 506638	0. 5096388	0. 3787882	0. 3787867
$\sin \Phi \sin \delta$	0. 3302211	0. 4881943	0. 4881943	0. 4179269	0. 4179269	0. 19588	0. 1958805	0. 3267311	0. 3267311
$\Sigma = \sin h$	0. 7055177	0. 7055193	0. 7055193	0. 7055172	0. 7055173	0. 70551	0. 7055193	0. 7055193	0. 7055178
h vraie	16. 95	17. 48	17. 48	16. 82	16. 86	17.	17. 43	17. 43	17. 00
Réfraction : R (A+B)	2. 80	3. 54	2. 90	3. 46	2. 91	3. 23	2. 84	3. 28	2. 79
h apparente	14. 15	13. 94	14. 58	13. 36	13. 95	14. 10	14. 59	14. 15	14. 21

Les hauteurs apparentes des étoiles à l'instant de la coïncidence sont donc les suivantes :

TABLEAU XVI

8 DÉCEMBRE

ÉTOILES	Est	Ouest
α Baleine ..	44°52'15''5	15.4
η Taureau ..	12.6	13.0
ς Persée ...	12.8	14.0
α Cocher...	14.4	13.9
β Taureau ..	12.5	12.1
γ Gémeaux.	13.5	13.7
ρ Gémeaux.	13.7	13.6

21 DÉCEMBRE

ÉTOILES	Est	Ouest
ξ Taureau..	10.4	10.4
λ Taureau ..	13.3	13.9
α Cocher...	14.3	13.8
β Taureau ..	13.8	14.2
θ Cocher...	13.7	13.0
γ Gémeaux.	13.5	13.9
δ Gémeaux.	13.3	12.5

31 DÉCEMBRE

ÉTOILES	Est	Ouest
ς Persée ...	12.7	12.7
λ Taureau..	13.7	13.4
α Taureau ..	14.6	13.9
α Cocher...	13.8	14.7
β Taureau ..	15.1	14.1
β Cocher...	13.9	14.6
θ Cocher...	13.4	14.0
γ Gémeaux.	14.1	14.5
ρ Gémeaux.	14.3	14.2

Ces tableaux montrent que la hauteur apparente d'une étoile observée est la même pour ses deux passages est et ouest. Les légers écarts que l'on constate ne dépassent guère 0''5. Ils entraînent, pour les heures de coïncidence des étoiles observées au voisinage du premier vertical une incertitude moindre que 0^s05. Par contre les hauteurs apparentes ainsi calculées varient d'une étoile à l'autre de plus d'une seconde d'arc. Les heures de coïncidence peuvent être de ce fait erronées de plus d'un dixième de seconde de temps.

On peut donc tirer de l'expérience que l'on vient de décrire, les deux importantes conclusions suivantes :

1^o Quand on observe plusieurs étoiles de grandeurs différentes, l'heure de la coïncidence pour chacune d'elles n'est pas l'heure de leur passage au même cercle de hauteur. On peut attribuer ce fait à l'existence d'une équation de grandeur qui a pour effet de rapprocher ou d'écarter les deux images sur la plaque de quantités variables. L'expérience montre qu'une telle équation de grandeur peut expliquer, pour la correction de pendule conclue, des écarts atteignant 1 dixième de seconde de temps, c'est-à-dire de l'ordre de grandeur des résidus que l'on a obtenus pour les soirées d'observation de l'opération de la longitude Paris-Nice.

2^o La hauteur d'observation à l'heure de la coïncidence est la même, pour une même étoile, à ses deux passages est et ouest. Si donc l'équation de grandeur relève ou abaisse le cercle de hauteur d'observation l'heure de la coïncidence sera avancée d'un côté, retardée de l'autre, de la même quantité et le C_p conclu de ces deux observations prises isolément n'en sera pas affecté. C'est la conclusion à laquelle

nous avaient conduit quelques pages plus haut des considérations théoriques.

Toutes les causes d'erreur que nous avons examinées et qui présentent un caractère « instrumental » ne semblent pas être des causes d'erreurs systématiques surtout si l'on a soin d'observer chaque étoile à ses deux passages est et ouest. Est-ce à dire que les observations faites avec l'instrument photographique des hauteurs égales soient exemptes d'erreurs systématiques? Non, car indépendamment des causes d'erreur auxquelles nous avons pu ne pas avoir songé ou dont nous avons pu interpréter insuffisamment les effets, il en est une qui est étrangère à l'instrument, et qui vicie toutes les observations : la réfraction.

Nous nous permettrons de dire ici quelques mots d'un travail important publié par MM. Nüsl et Fric dans le *Bulletin International de l'Académie des Sciences de Bohême*.

Ces auteurs ont fait construire un instrument visuel dont le principe est assez semblable à celui de l'astrolabe à prisme, mais où le prisme est remplacé par deux miroirs. Grâce à un jeu convenable de prismes placés sur le trajet des rayons lumineux on aperçoit dans le champ de la lunette non pas une mais trois images directes, et trois images réfléchies de l'étoile observée. Ces images coïncident en des instants différents, ce qui permet de multiplier les déterminations visuelles des heures de coïncidence. Cet appareil a donné de bons résultats, MM. Nüsl et Fric ont publié deux mémoires se rapportant à lui et une étude fort intéressante sur les anomalies de la réfraction. Ils s'expriment en ces termes :

« En analysant les longues séries d'observations faites avec l'appareil circumzénithal nous avons trouvé que l'erreur moyenne d'un seul passage complet est généralement bien plus petite que l'erreur moyenne de la détermination de l'heure résultant de ce passage. C'est ce que nous avons déjà dit dans notre première étude de l'année 1903 (page 44) et constaté de nouveau dans la deuxième étude de l'année 1906 (page 39). Voici comment nous avons essayé d'expliquer la cause de cette discordance : le mouvement de l'atmosphère effectue incessamment de petites anomalies de réfraction qui ne durent que des fractions de seconde et qui oscillent auprès d'une certaine position d'équilibre. Nous soupçonnons que cette position est influencée par des perturbations de plus longue durée, ce qui expliquerait tout simplement la discordance mentionnée. »

Les auteurs s'appliquent alors à démontrer expérimentalement qu'il en est ainsi. Ils trouvent que la période plus longue des anomalies

de réfraction atteint 20 secondes et que l'amplitude de la variation est d'environ $\pm 0''5$.

Je ne m'étendrai pas davantage sur le travail de MM. Nüsl et Fric. Je dirai pourtant que, comme eux, j'ai été frappé dès le début par ce fait, qui me paraissait anormal, que « l'erreur moyenne d'un seul passage complet est généralement plus petite que l'erreur moyenne de la détermination de l'heure résultant de ce passage ». Mais je pense que c'est la déformation des images, ou, si l'on veut, l'équation de grandeur qui en est la principale cause.

Je ne conteste d'ailleurs nullement l'existence d'anomalies de la réfraction à courte et à longue période : des anomalies à longue période produiraient sur les C_p conclus des observations des diverses étoiles, des erreurs alternativement positives et négatives. Leur valeur absolue dépasserait, d'après les mesures de MM. Nüsl et Fric, 0^s05 . Pourtant précisément à cause du caractère périodique de ces anomalies, l'erreur qui peut en résulter est essentiellement accidentelle.

Ce qui nous semble le plus à redouter, c'est une différence systématique entre les valeurs de la réfraction à une même hauteur, à l'est et à l'ouest. Si une telle différence existait, elle entacherait les corrections de pendule conclues, d'erreurs qu'il serait très difficile de déterminer. Si l'on tient compte de ce qu'une variation de réfraction de $0''1$ entraîne sur le C_p conclu une erreur d'environ $\frac{1}{100}$ de seconde de temps on doit convenir qu'il est difficile d'affirmer que la réfraction n'est pas une cause d'erreur systématique.

Pour en diminuer autant que possible l'influence, il ne semble pas qu'il y ait de remède plus efficace que de donner à l'angle des 2 miroirs une valeur aussi voisine qu'on le pourra de 90° . On diminuera ainsi la valeur de la réfraction, et on rendra plus voisines les régions de l'atmosphère que traversent les rayons lumineux à l'est et à l'ouest aux instants de la coïncidence. Mais, plus on diminue le rayon du cercle de hauteur d'observation, plus on restreint le nombre des étoiles observables. Il convient donc de se tenir dans un juste milieu. Avec un objectif semblable à celui de l'instrument de l'Observatoire de Nice, la valeur de 60° donnée à l'angle des miroirs serait sans doute la plus favorable.

Malgré les réserves que nous venons de faire on ne doit pas attacher à l'influence de la réfraction une importance trop grande. On a en effet une très sérieuse garantie dans le fait que les étoiles sont observées dans des azimuts très différents les uns des autres.

CONCLUSIONS

De toutes les causes d'erreur que nous avons examinées et qui se rapportent à l'instrument lui-même, aucune ne nous est apparue comme ayant un caractère systématique.

Parmi ces causes d'erreur, la plus importante semble être celle qui est due à ce que les images sont déformées, chacune d'elles n'étant donnée que par la moitié de l'objectif. L'erreur qui en résulte pour le Cp conclu est fonction de la grandeur et de la déclinaison de l'étoile, et de la sensibilité de la plaque. On la diminuera efficacement en augmentant autant qu'on le pourra la distance focale et le diamètre de l'objectif. En effet la valeur angulaire d'une distance donnée sur le cliché, et en particulier celle de l'épaisseur d'un grain sont d'autant moindres que la distance focale de la lunette est plus grande. De plus la déformation des images est moindre avec un objectif de grand diamètre parce que les taches de diffraction sont plus petites.

A l'inverse de ce qui a lieu dans un instrument méridien, où l'on se propose de déterminer la correction de pendule par des observations « absolues », on la détermine avec l'instrument des hauteurs égales par des observations différentielles (mesure de la distance verticale des deux images). De même que, pour faire des mesures différentielles précises, on emploie, pour les équatoriaux photographiques, des objectifs à long foyer et à grande ouverture, de même on a intérêt à augmenter autant que possible les dimensions de l'instrument photographique des hauteurs égales. On sera d'ailleurs limité pour cela, en particulier, par les erreurs dues à la réfraction. Quand on réduit les observations méridiennes en vue de la détermination de la correction de pendule, les formules que l'on emploie ne renferment pas la réfraction. Au contraire les observations faites avec l'instrument des hauteurs égales doivent être réduites en tenant compte de ses variations et les erreurs commises sur la détermination de ces dernières entachent de toute leur grandeur les Cp conclus.

On a le plus grand intérêt à observer les mêmes étoiles à leurs deux passages est et ouest. Avec l'instrument de l'Observatoire de Nice, l'angle du prisme étant voisin de 45° , ces deux passages sont séparés

par un très long intervalle de temps. Si, dans l'avenir, on était conduit à construire un nouvel instrument il semble qu'on aurait intérêt à donner aux deux miroirs un angle de 60 degrés. L'intervalle de temps qui sépare les deux passages ne dépasserait guère alors 4 heures.

On pourrait être tenté de calculer empiriquement pour chaque étoile la correction à faire subir à l'heure de coïncidence pour tenir compte de l'équation de grandeur, ce qui dispenserait d'observer les étoiles des deux côtés du méridien. Il faudrait pour cela s'astreindre à employer toujours pour chacune d'elles des plaques de même sensibilité. Mais il est possible que l'équation de grandeur soit variable d'un jour à l'autre, et il est plus satisfaisant de l'éliminer que de la déterminer et d'en tenir compte.

Parmi les essais que l'on peut entreprendre, les plus intéressants sont ceux qui permettront d'obtenir que chacune des images soit fournie par la totalité de l'objectif. On éviterait ainsi qu'elles soient déformées et on éliminerait sans doute l'équation de grandeur.

Le but principal de l'instrument photographique des hauteurs égales est la détermination de la différence de longitude entre deux stations. On désire aujourd'hui pouvoir faire de telles opérations sans faire l'échange des instruments ni des observateurs. Il faut pour cela que les observations soient exemptes d'erreurs personnelles. Pour les instruments méridiens à fil entraîné, cette condition semble être réalisée. Mais elle ne saurait l'être davantage que pour un instrument entièrement automatique où l'observateur est remplacé par la pendule.

Il faut de plus que les erreurs systématiques soient déterminées d'une façon rigoureuse, ou, ce qui revient au même, qu'elles soient les mêmes pour les deux instruments employés.

Quelle que soit notre conviction que notre instrument n'est affecté d'aucune cause d'erreur systématique, nous ne nous permettons pas de l'affirmer. Nous admettons très volontiers que (comme cela se produit pour les instruments méridiens les plus perfectionnés), les observations peuvent être entachées d'erreurs systématiques qu'il est difficile de déterminer. Mais, alors que la construction de deux instruments méridiens identiques est un problème mécanique à peu près insoluble, celle de deux instruments des hauteurs égales identiques est un problème d'optique qui peut être résolu. Je dis que c'est un problème d'optique parce que les corrections à apporter aux résultats des observations pour tenir compte des imperfections de réglage ou de construction mécanique de l'instrument, sont petites du second ordre, et l'expé-

rience nous a montré qu'elles ne dépassent pas quelques millièmes de seconde.

Même si l'on pense que les erreurs *instrumentales* que nous avons examinées dans cette discussion ne sont pas des erreurs accidentelles, on doit, il nous semble, admettre que si l'on emploie dans les deux stations des instruments identiques, si l'on y observe les mêmes étoiles en employant des plaques de même sensibilité, ces erreurs seront les mêmes pour les deux stations et s'élimineront dans la différence de longitude conclue.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
INTRODUCTION	3
<i>Chapitre</i> I. — Instrument photographique des hauteurs égales. — Principe et description.	14
<i>Chapitre</i> II. — Théorie de l'instrument	32
<i>Chapitre</i> III. — Préparation des observations. — Calages	63
<i>Chapitre</i> IV. — Application	65
<i>Chapitre</i> V. — Discussion des résultats. — Causes d'erreur	89
<i>Conclusions</i>	105

Deuxième Thèse

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

La Chimie des Météorites.

Vu et approuvé :

Paris, le 2 février 1913.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
M. MOLLIARD.

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
P. APPELL.

